6 Determinante

Risposta 1

Equazione della retta per due punti nel piano cartesiano (rispettivamente del piano per tre punti nello spazio cartesiano.
Per il caso dei quattro punti

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 0 & x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ 0 & x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ 0 & x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix}$$

e quest'ultimo determinante è zero se e solo se i quattro punti sono complanari (cf. libro di testo p. 56).

Risposta 2

Sul determinante di Vandermonde.
La matrice che rappresenta $\mathfrak{L}$ è la matrice di Vandermonde

$$\mathbf{V}(x_1, \ldots, x_d) = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{d-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^{d-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_d & x_d^2 & \ldots & x_d^{d-1} \end{bmatrix}$$

il cui determinante è calcolato nel paragrafo 6.4 p. 286 del libro di testo:

$$\det(\mathbf{V}(x_1, \ldots, x_d)) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{d-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^{d-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_d & x_d^2 & \ldots & x_d^{d-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq d} (x_j - x_i).$$

Quindi $\det(\mathbf{V}(x_1, \ldots, x_d)) \neq 0$ se e solo se $x_1, \ldots, x_d$ sono distinti.

Risposta 3

Determinante di matrici antisimmetriche

1. I tre determinanti in questione valgono a_{12}^2, 0, $(a_{12}a_{34} - a_{14}a_{32})^2$.

2. Se n è dispari, allora $\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = -\mathbf{A}$ implica

$$\det(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}) = \det(-\mathbf{A}) = (-1)^n \det(\mathbf{A}) = -\det(\mathbf{A}).$$

   D'altra parte $\det(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}) = \det(\mathbf{A})$ per ogni matrice, quindi $\det(\mathbf{A}) = -\det(\mathbf{A})$ dev'essere nullo. Se n è pari, dal Corollario 6.3 a pagina 485 del testo segue che il determinante di $\mathbf{A}$ è un quadrato.