7 Autovalori e autovettori

Esercizio 1

Una matrice reale con tre autovalori distinti non tutti reali
Data la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 7 & 4 \\ 1 & 4 & -8 \\ -8 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

1. verificare che $\lambda = 9i$ è un autovalore di $\mathbf{A}$;
2. dedurre che gli autovalori di $\mathbf{A}$ sono $9i$, $-9i$ e 9; concludere che $\mathbf{A}$ non è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$, mentre è diagonalizzabile su $\mathbb{C}$.

Esercizio 2

Diagonalizzabilità delle matrici $\mathbf{A}$ tali che $\mathbf{A}^2 = \mathbf{I}$
Sia $\mathbf{A}$ una matrice quadrata reale di ordine n. Si supponga che $\mathbf{A}^2 = \mathbf{I}$ e $\mathbf{A} \neq \mathbf{I}$, $\mathbf{A} \neq -\mathbf{I}$. Si mostri che

1. $(\mathbf{A}+\mathbf{I})(\mathbf{A}-\mathbf{I}) = (\mathbf{A}-\mathbf{I})(\mathbf{A}+\mathbf{I}) = \mathbf{O}$ (nell'equazione $\mathbf{O}$ denota la matrice nulla);
2. lo spazio colonna di $\mathbf{A}+\mathbf{I}$ (risp. di $\mathbf{A}-\mathbf{I}$) è contenuto nell'autospazio di $\mathbf{A}$ relativo all'autovalore $\lambda = 1$ (risp. nell'autospazio relativo all'autovalore $\lambda = -1$);
3. la matrice identità $\mathbf{I}$ è combinazione lineare delle due matrici $\mathbf{A}+\mathbf{I}$ e $\mathbf{A}-\mathbf{I}$;
4. $\mathbb{R}^n = \mathrm{Col}(\mathbf{A}+\mathbf{I}) + \mathrm{Col}(\mathbf{A}-\mathbf{I})$ e $\mathbf{A}$ è diagonalizzabile (suggerimento: per dimostrare la prima uguaglianza si moltiplichi l'uguaglianza tra matrici del punto precedente a destra per un vettore $\mathbf{v}$; per mostrare che esiste una base di $\mathbb{R}^n$ formata da autovettori di $\mathbf{A}$ usare il punto 2 dell'esercizio);
5. quali sono gli autovalori di $\mathbf{A}$? posto $r = r(\mathbf{A}+\mathbf{I})$, esprimere le molteplicità algebriche degli autovalori di $\mathbf{A}$ in funzione di r e n (suggerimento: il punto 2 e il punto 4 consentono di costruire una base di $\mathbb{R}^n$ formata da autovettori di $\mathbf{A}$).

Esercizio 3

Sistemi differenziali lineari.
Consideriamo lo spazio vettoriale reale

$$\mathbf{V} = \{\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_n]^{\mathrm{T}} : x_i \in C^\infty(\mathbb{R})\}$$

delle n-uple di funzioni reali infinitamente differenziabili. Scriviamo $\mathbf{x}' = [x_1', \dots, x_n']$ per indicare il vettore ottenuto da $\mathbf{x}$ derivando tutte le coordinate. Se $A \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n)$ è una matrice a coefficienti costanti, un'equazione della forma $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ si chiama un *sistema differenziale lineare omogeneo.*

1. Dimostrare che se
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}$$
è diagonale, allora la soluzione generale del sistema è
$$\mathbf{x}(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i e^{\lambda_i t} \mathbf{e}_i.$$

2. Dimostrare che se $\mathbf{A}$ è diagonalizzabile e $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ è una base di autovettori di $\mathbf{A}$, allora la soluzione generale del sistema è
$$\mathbf{x}(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i e^{\lambda_i t} \mathbf{v}_i$$
dove λ_i è l'autovalore relativo all'autovettore $\mathbf{v}_i$.