7 Autovalori e autovettori

Risposta 1

Una matrice reale con tre autovalori distinti non tutti reali

1. Verifichiamo che $\det(\mathbf{A} - 9i\mathbf{I}) = 0$:

$$\begin{vmatrix} 4-9i & 7 & 4 \\ 1 & 4-9i & -8 \\ -8 & 4 & 1-9i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4-9i & -8 \\ -8 & 4 & 1-9i \\ 4-9i & 7 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 4-9i & -8 \\ 0 & 4+8(4-9i) & 1-9i-64 \\ 0 & 7-(4-9i)^2 & 4+8(4-9i) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 4-9i & -8 \\ 0 & 36(1-2i) & -9(7+i) \\ 0 & 72(1+i) & 36(1-2i) \end{vmatrix} = 9 \times 36 \times \begin{vmatrix} 4(1-2i) & -(7+i) \\ 2(1+i) & 1-2i \end{vmatrix} =$$

$$= 18 \times 36 \times (2(-3-4i) + (6+8i)) = 0$$

2. Siccome $\mathbf{A}$ è una matrice reale, il suo polinomio caratteristico ha coefficienti reali, e quindi, se $9i$ è un autovalore di $\mathbf{A}$, anche $-9i$ è un autovalore (cf. paragrafo 9.6 del libro di testo). Il terzo autovalore λ_0 di $\mathbf{A}$ si può determinare calcolando la traccia di $\mathbf{A}$ che è $4 + 4 + 1 = 9$:

$$\lambda_0 = \mathrm{tr}(\mathbf{A}) - 9i - (-9i) = 9.$$

Quindi gli autovalori di $\mathbf{A}$ sono $9i$, $-9i$ e 9. La matrice non è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$ perché non tutti i suoi autovalori sono reali, mentre è diagonalizzabile su $\mathbb{C}$ perché i suoi autovalori sono distinti.

Risposta 2

Diagonalizzabilità delle matrici $\mathbf{A}$ tali che $\mathbf{A}^2 = \mathbf{I}$

1. Dimostriamo la prima uguaglianza:

$$(\mathbf{A}+\mathbf{I})(\mathbf{A}-\mathbf{I}) = \mathbf{A}^2 + \mathbf{IA} - \mathbf{AI} - \mathbf{I}^2 = \mathbf{A}^2 - \mathbf{I}^2 = \mathbf{I} - \mathbf{I} = \mathbf{O}$$

   L'altra uguaglianza si dimostra in modo analogo.

2. Lo spazio colonna di $\mathbf{A}+\mathbf{I}$ coincide con l'insieme dei vettori della forma $(\mathbf{A}+\mathbf{I})\mathbf{x}$; l'autospazio relativo all'autovalore $\lambda = 1$ di $\mathbf{A}$ è l'insieme dei vettori $\mathbf{v}$ tali che $(\mathbf{A}-\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Ora, se $\mathbf{v} = (\mathbf{A}+\mathbf{I})\mathbf{x}$ appartiene allo spazio colonna di $\mathbf{A}+\mathbf{I}$,

$$(\mathbf{A}-\mathbf{I})\mathbf{v} = (\mathbf{A}-\mathbf{I})(\mathbf{A}+\mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{Ox} = \mathbf{0}$$

   quindi $\mathbf{v}$ appartiene all'autospazio relativo all'autovalore $\lambda = 1$ di $\mathbf{A}$.

3. la matrice identità $\mathbf{I}$ è combinazione lineare delle due matrici $\mathbf{A}+\mathbf{I}$ e $\mathbf{A}-\mathbf{I}$:

$$\mathbf{I} = \frac{1}{2}(\mathbf{A}+\mathbf{I}) - \frac{1}{2}(\mathbf{A}-\mathbf{I})$$

4. Per ogni $\mathbf{v}$ di $\mathbb{R}^n$

$$\mathbf{v} = \mathbf{Iv} = \frac{1}{2}(\mathbf{A}+\mathbf{I})\mathbf{v} - \frac{1}{2}(\mathbf{A}-\mathbf{I})\mathbf{v} = (\mathbf{A}+\mathbf{I})\mathbf{x} + (\mathbf{A}-\mathbf{I})\mathbf{y}$$

   dove $\mathbf{x} = \frac{1}{2}\mathbf{v}$ e $\mathbf{y} = -\frac{1}{2}\mathbf{v}$. Questo mostra che ogni vettore di $\mathbb{R}^n$ si scrive come somma di un vettore di $\mathrm{Col}(\mathbf{A}+\mathbf{I})$ e di un vettore di $\mathrm{Col}(\mathbf{A}-\mathbf{I})$. Scelte una base $\mathcal{B}_1$ di $\mathrm{Col}(\mathbf{A}+\mathbf{I})$ e una base $\mathcal{B}_2$ di $\mathrm{Col}(\mathbf{A}-\mathbf{I})$, l'insieme $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ è quindi un insieme di generatori di $\mathbb{R}^n$. Ma $\mathcal{B}$ è anche linearmente indipendente perché $\mathrm{Col}(\mathbf{A}+\mathbf{I})$ e $\mathrm{Col}(\mathbf{A}-\mathbf{I})$ sono contenuti in autospazi relativi ad autovalori distinti di $\mathbf{A}$. Abbiamo così trovato una base di $\mathbb{R}^n$ formata da autovettori di $\mathbf{A}$; quindi $\mathbf{A}$ è diagonalizzabile.

5. Per il punto precedente $\mathbb{R}^n$ è somma diretta di $\mathrm{Col}(\mathbf{A}+\mathbf{I})$ e $\mathrm{Col}(\mathbf{A}-\mathbf{I})$, e questi spazi colonna coincidono con gli autospazi di $\mathbf{A}$ relativi a $\lambda = -1$ e $\lambda = 1$ rispettivamente. Quindi $\mathbf{A}$ ha gli autovalori $\lambda = -1$ di molteplicità $r = r(\mathbf{A}+\mathbf{I})$ e $\lambda = 1$ di molteplicità $n - r$.