8 Spazi euclidei

Risposta 1

Parallelogramma in $\mathbb{R}^4$

I vertici sono i punti $O = (0,0,0,0)$, $A = (1,2,3,4)$, $B = (1,0,1,1)$ e $C = (2,2,4,5)$ (C è un estremo del vettore $\mathbf{v} + \mathbf{w}$). Le lunghezze dei lati e delle diagonali del parallelogramma sono:

$$OA = \|\mathbf{v}\| = \sqrt{30}, OB = \|\mathbf{w}\| = \sqrt{3}, OC = \|\mathbf{v}+\mathbf{w}\| = \sqrt{49} = 7, AB = \|\mathbf{v}-\mathbf{w}\| = \sqrt{17}$$

Secondo la legge del parallelogramma (esercizio 8.9 p. 240) dev'essere

$$OC^2 + AB^2 = 2OA^2 + 2BC^2$$

e in effetti

$$49 + 17 = 2(30 + 3).$$

Il coseno dell'angolo nell'origine è

$$\cos(AOB) = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{\|\mathbf{v}\|\,\|\mathbf{w}\|} = \frac{8}{3\sqrt{10}}.$$

Il coseno dell'angolo in A è l'opposto del coseno dell'angolo in O. Se $\mathbf{H}$ è il piano del parallelogramma, una base di $\mathbf{H}^\perp$ è formata dai due vettori $[1,1,-1,0]$ e $[2,3,0,-2]$, per cui $\mathbf{H}$ ha equazioni

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$

Risposta 2

Una matrice di rotazione

La matrice $\mathbf{A}$ è ortogonale perché

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & -8 \\ 7 & 4 & 4 \\ 4 & -8 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 7 & 4 \\ 1 & 4 & -8 \\ -8 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 81 & 0 & 0 \\ 0 & 81 & 0 \\ 0 & 0 & 81 \end{bmatrix}.$$

Il determinante di $\mathbf{A}$ è 1 e la traccia di $\mathbf{A}$ è 1, quindi $\mathbf{A}$ rappresenta una rotazione nello spazio di un angolo di $\pi/2$ radianti attorno a un asse per l'origine. L'asse è l'autospazio relativo all'autovalore 1: si tratta della retta generata dal vettore $[-2, -2, 1]^T$.