Strategia per la soluzione dei problemi tecnico-scientifici

La soluzione degli esercizi può essere frustrante per gli studenti, poiché il raggiungimento del risultato corretto è messo a repentaglio da vari fattori: oltre a una buona conoscenza della teoria della materia oggetto della verifica è necessario seguire una strategia efficace, applicando correttamente le regole della matematica. Se inoltre non si è perfettamente concentrati è facile commettere qualche errore dovuto alla distrazione.

Si intuisce quindi che in un problema di media complessità gli ostacoli possono essere tali da ridurre notevolmente la probabilità di raggiungere il risultato corretto.

Si forniscono alcune indicazioni sulla strategia e sugli strumenti matematici fondamentali che possono essere d'aiuto nella soluzione della maggior parte dei problemi proposti nel testo, soprattutto nei capitoli legati allo studio dell'elettrotecnica e dell'elettronica analogica.

Si vedrà che gli strumenti matematici necessari sono in realtà piuttosto semplici, ma devono essere maneggiati con sicurezza; si consiglia quindi di esercitarsi, anche con l'aiuto dei testi e dell'insegnante di matematica.

La strategia si sviluppa nei seguenti passi.

1) *Analizzare il testo* del problema individuando i dati forniti e le variabili incognite, soluzioni del problema. Quando è possibile, rappresentare il problema schematicamente (disegno, schema elettrico, schema a blocchi ecc.) evidenziando le variabili e individuando quelle note e quelle incognite.
2) *Individuare le formule matematiche* che legano le grandezze in gioco.
   a) Se si dispone di una sola equazione che contiene una variabile incognita, esplicitare l'incognita come descritto al punto 3).
   b) In caso contrario si può: b1) scrivere un sistema di equazioni e risolvere; b2) individuare la sequenza delle formule che consentono di ricavare i valori di incognite intermedie, fino a calcolare l'incognita (o le incognite) che rappresenta la soluzione del problema.
3) *Esplicitare la variabile incognita (x) in un'equazione*:
   a) *algebrica di 1° grado*: $y = \frac{a}{b}x + c$

      soluzione → $y - c = \frac{a}{b}x \rightarrow (y-c)b = ax \rightarrow x = \frac{b}{a}(y-c)$

   b) *algebrica di 2° grado*: $ax^2 + bx + c = 0$ con $a \neq 0$

      soluzione → $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

      se il temine in x è nullo si ha: $y = x^2 \rightarrow x = \pm\sqrt{y}$

c) *trigonometrica*: $y = a\mathrm{sen}x$

soluzione $\rightarrow \dfrac{y}{a} = \mathrm{sen}x \rightarrow x = \mathrm{arcsen}\dfrac{y}{a}$ (stessa cosa per cos e tg)

d) *esponenziale o logaritmica*:

$$y = 10^x \rightarrow x = \log_{10} y$$

$$y = e^x \rightarrow x = \ln y$$

$$y = \log_{10} x \rightarrow x = 10^y$$

$$y = \ln x \rightarrow x = e^y$$

alcune proprietà degli esponenziali e dei logaritmi:

$10^a 10^b = 10^{a+b}$, $\log x^a = a \log x$, $\log ab = \log a + \log b$,

$\log \dfrac{a}{b} = \log a - \log b$

e) *integro-differenziale*: $y = \int x\,dt \leftrightarrow x = \dfrac{dy}{dt}$

f) *complessa*: $y = jx + a$

soluzione $\rightarrow y - a = jx \rightarrow x = \dfrac{y-a}{j} \rightarrow x = -j(y-a)$
essendo $j \cdot j = -1$

4) *Sostituire i valori numerici* delle variabili note, a destra dell'uguaglianza. Si faccia attenzione a inserire correttamente il valore, tenendo conto del prefisso.

pico: $\mathrm{p} = 10^{-12}$
nano: $\mathrm{n} = 10^{-9}$
micro: $\mu = 10^{-6}$
milli: $\mathrm{m} = 10^{-3}$
chilo: $\mathrm{k} = 10^{3}$
mega: $\mathrm{M} = 10^{6}$
giga: $\mathrm{G} = 10^{9}$

Per esempio:

15 pF $\rightarrow 15 \cdot 10^{-12}$ F
5 cm $\rightarrow$ 0,05 m
22 kΩ $\rightarrow 22 \cdot 10^{3}$ Ω
0,15 mm^2 $\rightarrow$ 0,00000015 m $= 150 \cdot 10^{-9}$ m

5) Impostare correttamente il *calcolo sulla calcolatrice*. Leggere attentamente le istruzioni della calcolatrice, in particolare per ciò che riguarda l'uso delle parentesi, l'inserimento dei valori in notazione scientifica, la predisposizione in radianti o in gradi per i calcoli trigonometrici, la conversione dei valori tra i sistemi di numerazione decimale, binario ed esadecimale.

6) Il *risultato ottenuto* è espresso nell'unità di misura senza prefisso: Ω, m, m^2, F, A ecc. In base alla precisione richiesta *scegliere il numero di cifre significative* con cui arrotondare il risultato; la cifra più significativa di un numero è la prima da sinistra diversa da zero. Si distinguono due casi.

a) *Addizione e sottrazione*: il risultato deve contenere un numero di cifre decimali pari a quelle dell'operando con minore numero di cifre decimali; per esempio nella seguente addizione:

$$\begin{array}{rl} 31{,}4521 & + \\ 5{,}23 & + \\ 423{,}4782 & = \\ 460{,}1603 & \end{array}$$

il risultato deve essere espresso con due cifre decimali, pari a quelle del secondo addendo, e quindi, arrotondando la cifra meno significativa, vale 460,16.

b) *Moltiplicazione e divisione*: il prodotto o il quoziente deve avere un numero di cifre significative pari a quelle del numero meno preciso coinvolto nel calcolo. Per esempio nel prodotto:

$$425{,}356 \cdot 0{,}02566 \cdot 2{,}5 = 27{,}2865874$$

i tre operandi hanno rispettivamente sei, quattro e due cifre significative; il risultato deve essere espresso con due cifre significative, arrotondando quella inferiore; vale quindi 27.

7) Utilizzare il *prefisso più opportuno* per esprimere il risultato nel modo più facilmente leggibile; alcuni esempi:

$$0{,}0000245\ \text{A} \rightarrow 24{,}5\ \mu\text{A}$$
$$756000\ \text{Hz} \rightarrow 756\ \text{kHz}$$
$$0{,}000000458\ \text{F} \rightarrow 458\ \text{nF}$$

La FIGURA **1** sintetizza i passaggi appena descritti.

Si tenga presente che è opportuno analizzare criticamente i risultati ottenuti, in modo da poter evitare errori macroscopici; due modalità di controllo dei risultati sono:

- l'analisi dimensionale delle formule, per rivelare errori durante la fase di esplicitazione delle variabili;
- l'analisi dell'ordine di grandezza dei valori ottenuti, per rivelare eventuali errori di calcolo. Per esempio ponendo in parallelo due resistori ci si aspetta una resistenza equivalente inferiore a quella più piccola tra i due; se il risultato è differente significa che si è commesso un errore.

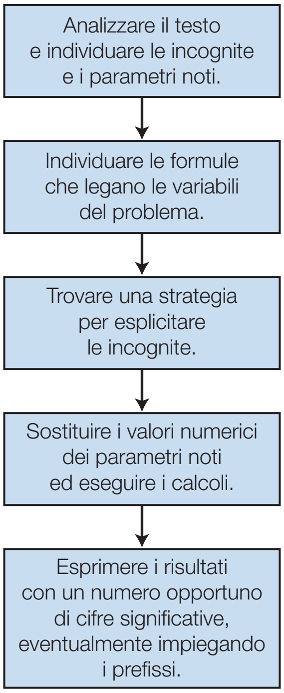

FIGURA **1**

Esempi di soluzione di esercizi

Si fornisce ora qualche esempio di applicazione della strategia e dei passaggi matematici appena descritti. Lo studente non si preoccupi se alcuni esempi trattano argomenti che ancora non conosce; ciò che si vuole sottolineare è che, una volta individuate le formule utili al problema, la soluzione di questi semplici problemi si svolge sempre con la sequenza sopra descritta, i cui passi sono richiamati dalla numerazione in colore.

Quale valore di R_2 bisogna mettere in parallelo a $R_1 = 200\ \Omega$ per ottenere una resistenza equivalente pari a $R_{eq} = 180\ \Omega$?

1) Si disegna lo schema elettrico (FIGURA **2**).

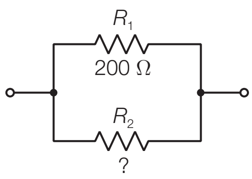

FIGURA **2**

2a) La formula matematica (algebrica) che lega le variabili è:

$$R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

3) Si esplicita l'incognita R_2 con i seguenti passaggi:

$$R_{eq}(R_1 + R_2) = R_1R_2 \rightarrow R_{eq}R_1 + R_{eq}R_2 = R_1R_2 \rightarrow R_1R_2 - R_{eq}R_2 = R_{eq}R_1 \rightarrow$$

$$R_2(R_1 - R_{eq}) = R_{eq}R_1 \rightarrow R_2 = \frac{R_{eq}R_1}{R_1 - R_{eq}}$$

4-5) Si sostituiscono i valori numerici e si calcola il risultato:

$$R_2 = \frac{R_{eq}R_1}{R_1 - R_{eq}} = \frac{186 \cdot 200}{200 - 186} = 2657{,}14\ \Omega$$

6-7) Si considerano tre cifre significative, come quelle dei dati in ingresso, si arrotonda e si utilizza il prefisso più opportuno:

$$R_2 = 2{,}66\ \text{k}\Omega$$

Quanto tempo impiega un condensatore $C = 10\ \mu F$, inizialmente scarico e alimentato da una tensione $E = 10$ V attraverso una resistenza $R = 1{,}2\ \text{k}\Omega$, per caricarsi fino a una tensione $v_c = 7$ V?

1) Si disegna lo schema elettrico (FIGURA **3**).

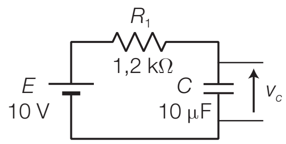

FIGURA **3**

2a) La formula matematica (esponenziale) che lega le variabili è:

$$v_c(t) = E(1 - e^{-\frac{t}{RC}})$$

3a) Si esplicita l'incognita t (tempo) con i seguenti passaggi:

$$\frac{v_c(t)}{E} = 1 - e^{-\frac{t}{RC}} \rightarrow e^{-\frac{t}{RC}} = 1 - \frac{v_c(t)}{E} \rightarrow -\frac{t}{RC} = \ln(1 - \frac{v_c(t)}{E}) \rightarrow$$

$$t = -RC\ln(1 - \frac{v_c(t)}{E})$$

4-5) Si sostituiscono i valori numerici e si calcola il risultato:

$$t=-RC\ln(1-\frac{v_c(t)}{E})=-1{,}2\cdot 10^3\cdot 10\cdot 10^{-6}\ln(1-\frac{7}{10})=0{,}014448\text{ s}$$

6-7) Si considerano due cifre significative, come quelle dei dati in ingresso, si arrotonda e si utilizza il prefisso più opportuno:

$$t=14\text{ ms}$$

Quanto dovrebbe essere lungo uno spezzone di filo di rame con resistività $\rho = 0{,}022\ \Omega\cdot\text{cm}$ e sezione $S = 3{,}0\text{ mm}^2$, per presentare una resistenza $R = 3{,}5\text{ k}\Omega$?

2a) La formula matematica (algebrica) che lega le variabili è:

$$R=\rho\frac{l}{S}$$

3) Si esplicita l'incognita l:

$$l=\frac{R\cdot S}{\rho}$$

4-5) Si sostituiscono i valori numerici (convertendoli nelle unità base: m, m^2 ecc.) e si calcola il risultato:

$$l=\frac{R\cdot S}{\rho}=\frac{3500\cdot 3\cdot 10^{-6}}{0{,}00022}=47{,}7\overline{27}\text{ m}$$

6-7) Si considerano due cifre significative, come quelle dei dati in ingresso; l'espressione senza prefisso, in questo caso, è quella più facilmente leggibile: $l = 48$ m.

A quale tensione V corrisponde il livello $L_{dbv} = -34$ dBv?

2a) La formula matematica (logaritmica) che lega le variabili è:

$$L_{dBv}=20\log_{10}\frac{V}{V_0}\ (\text{con } V_0=0{,}775\text{ V})$$

3) Si esplicita l'incognita V con i seguenti passaggi:

$$\log_{10}\frac{V}{V_0}=\frac{L_{dbv}}{20}\rightarrow\frac{V}{V_0}=10^{\frac{L_{dbv}}{20}}\rightarrow$$

$$V=V_0\cdot 10^{\frac{L_{dBv}}{20}}$$

4-5) Si sostituiscono i valori numerici e si calcola il risultato:

$$V=V_0\cdot 10^{\frac{L_{dBv}}{20}}=0{,}775\cdot 10^{\frac{-34}{20}}=0{,}0154633$$

6-7) Si considerano tre cifre significative, si arrotonda e si utilizza il prefisso più opportuno:

$$V=15{,}5\text{ mV}$$

Calcolare la corrente I_3 nel circuito in FIGURA 4.

Suggerimento: non essendo possibile trovare I_3 mediante una formula unica, si procede con la sequenza (caso 2b2):

- si calcola R equivalente (parallelo di R_2 e R_3 in serie a R_1);
- si trova I_1 con la legge di Ohm;
- si ricava V_{R1} con la legge di Ohm;
- si ricavano $V_{R2} = V_{R3}$ con il principio di Kirchhoff per le tensioni;
- si trova infine I_3 con la legge di Ohm.

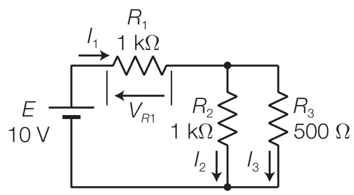

FIGURA 4

Due automobili (A e B) si muovono a velocità costante lungo un'autostrada; l'automobile B viaggia a 100 km/h e si trova 3 km avanti rispetto ad A, che viaggia a 120 km/h. Quanto tempo impiega A per raggiungere B? In quale punto dell'autostrada avviene l'incontro?

1) Il problema può essere schematizzato dalla FIGURA 5. Sono note le velocità costanti di A ($v_A = 120$ km/h) e di B ($v_B = 100$ km/h) e la posizione iniziale di B e di A ($x_{0B} = 3$ km e $x_{0A} =$ 0 km, ponendo lo zero del sistema di riferimento nella posizione iniziale di A); le incognite sono l'intervallo di tempo in cui avviene l'incontro (t_{inc}) e la posizione dell'incontro (x_{inc}).

2) Le formule da utilizzare sono quelle che descrivono il moto uniforme (a velocità costante) di A e di B, tenendo conto delle posizioni iniziali:

$$\begin{cases} x_A = v_A \cdot t \\ x_B = v_B \cdot t + x_{0B} \end{cases}$$

3) Nel punto d'incontro le coordinate di A e B coincidono, quindi : $x_A = x_B = x_{inc}$, da cui si deduce, uguagliando i secondi membri del sistema, $v_A \cdot t_{inc} = v_B \cdot t_{inc} + x_{0B}$.
Si ricava quindi l'espressione di t_{inc}:

$$t_{inc} = \frac{x_{0B}}{v_A - v_B}$$

che, sostituita nella prima equazione del sistema fornisce la posizione x_{inc}:

$$x_{inc} = v_A \cdot t_{inc} = v_A \frac{x_{0B}}{v_A - v_B}$$

4-7) Sostituendo i valori noti si trova:

$$t_{inc} = \frac{x_{0B}}{v_A - v_B} = \frac{3}{120 - 100} = 0{,}15 \text{ h}$$

$$x_{inc} = v_A \cdot t_{inc} = 120 \cdot 0{,}15 = 18 \text{ km}$$

(Essendo le velocità espresse in km/h, i calcoli forniscono i tempi espressi in ore e le distanze in km.)

Proviamo a riproporre il problema in termini leggermente diversi; dalla soluzione si nota che le equazioni utilizzate sono le stesse di prima ma, essendo diverse le incognite, cambia la strategia di soluzione.

Due automobili (A e B) si muovono a velocità costante lungo un'autostrada; l'automobile B viaggia a 100 km/h e si trova 3 km avanti rispetto ad A. A quale velocità dovrebbe viaggiare A per raggiungere B esattamente in corrispondenza del prossimo casello, che si trova 20 km oltre la posizione di B? Dopo quanto tempo avverrebbe l'incontro?

1) Il problema può essere schematizzato dalla FIGURA **6**. Sono note: la velocità costante di B ($v_B = 100$ km/h), la posizione iniziale di B e di A ($x_{0B} = 3$ km, $x_{0A} = 0$ km, ponendo lo zero del sistema di riferimento nella posizione iniziale di A), la posizione del casello, in cui dovrà avvenire l'incontro ($x_{cas} = 23$ km); le incognite sono l'intervallo di tempo in cui avverrà l'incontro al casello (t_{cas}) e la velocità costante v_A che deve mantenere A per far avvenire l'incontro esattamente in corrispondenza del casello.

2) Le formule da utilizzare sono le stesse del caso precedente (moto uniforme):

$$\begin{cases} x_A = v_A \cdot t \\ x_B = v_B \cdot t + x_{0B} \end{cases}$$

3) Il tempo impiegato da B per raggiungere il casello si ricava esplicitando *t* dalla seconda equazione:

$$t_{cas} = \frac{x_{cas} - x_{0B}}{v_B}$$

che, sostituito nella prima equazione, consente di trovare la velocità che deve avere A per incontrare B al casello nello stesso istante t_{cas}:

$$v_A = \frac{x_{cas}}{t_{cas}}$$

4-7) Sostituendo i valori noti si trova:

$$t_{cas} = \frac{x_{cas} - x_{0B}}{v_B} = \frac{23-3}{100} = 0{,}2 \text{ h}$$

$$v_A = \frac{x_{cas}}{t_{cas}} = \frac{23}{0{,}2} = 115 \text{ km/h}$$

La propagazione degli errori

I parametri noti da inserire in una formula sono generalmente conosciuti a meno di un certo errore. Per esempio i lati di un rettangolo possono essere misurati (*misura diretta*) con un metro, e il risultato della misura sarà noto a meno di un certo errore, dipendente dall'incertezza (precisione) dello strumento (per esempio ±1 mm).

La misura dei due lati viene quindi espressa mediante la lettura effettuata e il relativo errore:

$$\text{base} = b \pm \Delta b$$
$$\text{altezza} = a \pm \Delta a$$

Gli errori Δb e Δa sono detti *errori assoluti*; i rapporti tra gli errori assoluti e le misure effettuate sono detti *errori relativi*: $\Delta b/b$ e $\Delta a/a$.
Ci si chiede ora: conoscendo gli errori che affliggono i parametri noti di un problema (per esempio risultanti da misure dirette), con quale errore sono calcolate le variabili incognite, ricavate con delle formule da tali parametri (*misura indiretta*)?

Esempi di misure indirette sono il calcolo del semiperimetro e dell'area di un rettangolo, noti i lati.

La propagazione degli errori dipende dal tipo di operazioni presenti nella formula con cui si calcola l'incognita; si citano i casi più semplici:

- **moltiplicazione per una costante K:**

$$x = K \cdot a$$

l'errore assoluto Δx si trova moltiplicando Δa per K:

$$\Delta x = K \cdot \Delta a$$

Per esempio, noto un lato l di un quadrato con errore Δl, l'errore assoluto sul perimetro, che si trova con la formula $p = 4 \cdot l$, è dato da $4 \cdot \Delta l$.

- **somma o differenza di variabili:**

$$x = a \pm b$$

l'errore assoluto Δx si trova sommando gli errori assoluti Δa e Δb:

$$\Delta x = \Delta a + \Delta b$$

Per esempio, noti i lati a e b di un rettangolo con errori assoluti Δa e Δb, l'errore assoluto sul semiperimetro, che si trova con la formula $p/2 = a + b$, è dato da $\Delta p/2 = \Delta a + \Delta b$.
Si osservi che in una differenza, mentre gli errori si sommano, il valore risultante dalla differenza può essere anche molto piccolo, se i termini hanno valori vicini tra loro. Di conseguenza l'errore relativo sul risultato potrebbe essere elevato; se ne deduce che è bene evitare misure indirette che nascono dalla differenza tra due parametri noti di valori comparabili.

- **prodotto o divisione di variabili:**

$$x = a \cdot b \quad \text{oppure} \quad x = a : b$$

l'errore assoluto Δx si trova sommando gli errori relativi $\Delta a/a$ e $\Delta b/b$:

$$\Delta x = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b}$$

Per esempio, noti i lati a e b di un rettangolo con errori assoluti Δa e Δb, l'errore assoluto sull'area, che si trova con la formula $A = a \cdot b$, è dato da $\Delta A = \Delta a/a + \Delta b/b$.