Metodo della trasformata di Laplace

Il metodo simbolico consente di affrontare l'analisi di reti contenenti componenti reattivi (condensatori e induttori) in regime sinusoidale, aggirando la complessità matematica introdotta dalle relazioni integro-differenziali (con derivate e integrali) che legano le tensioni e le correnti su quei componenti.

Se i segnali d'ingresso hanno un andamento generico o se vogliamo studiare la fase transitoria che segue l'applicazione di un segnale a una rete, dobbiamo usare un metodo più generale, di cui quello simbolico è un caso particolare: il metodo della *trasformata di Laplace*.

Si richiama in FIGURA **1** il quadro riassuntivo dei metodi per l'analisi delle reti lineari.

Si tenga presente che i principi e i teoremi per l'analisi delle reti (legge di Ohm, principi di Kirchhoff, sovrapposizione degli effetti, teoremi di Thevenin e Norton, ecc.) si applicano in modo formalmente identico nei vari metodi di trasformazione.

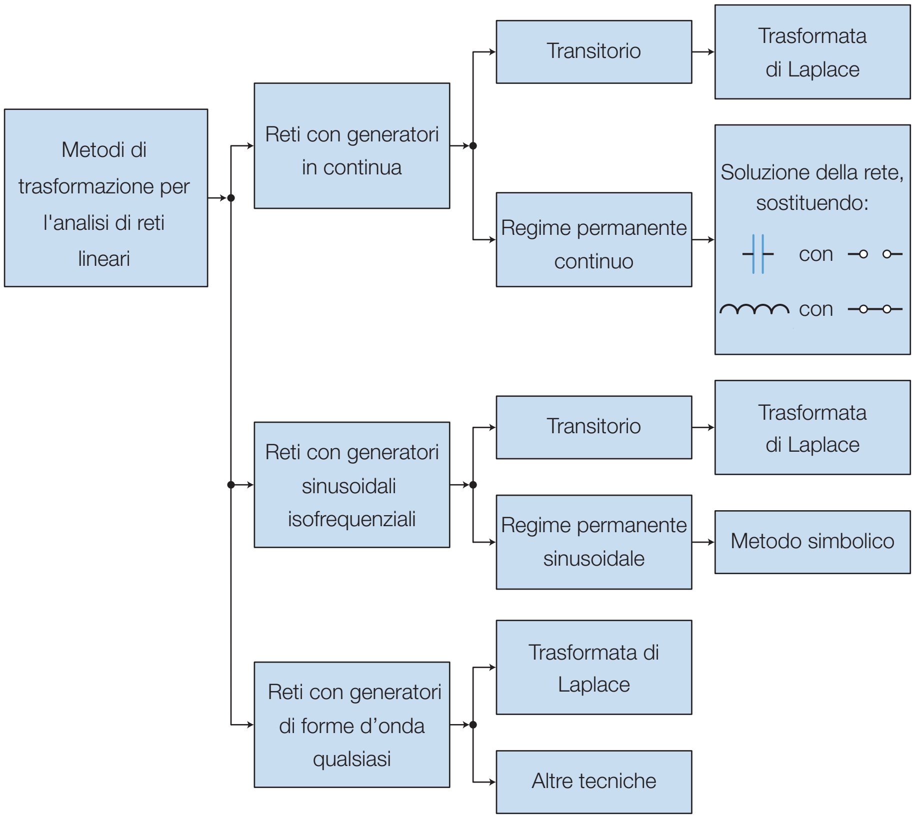

FIGURA **1** Quadro riassuntivo dei metodi per l'analisi delle reti lineari.

Da un punto di vista fisico i componenti reattivi *immagazzinano energia* e, come è noto, la variazione dell'energia di un qualsiasi sistema richiede tempo, per cui l'adeguamento di un circuito alle variazioni imposte da un segnale genericamente variabile *nel tempo*, avviene in modo dipendente dalla legge con cui i componenti reattivi modificano la propria corrente o tensione *nel tempo*.

Tali relazioni sono:

- Per il resistore:

$$v(t) = Ri(t) \tag{1}$$

- Per l'induttore:

$$v(t) = L\frac{di(t)}{dt} \tag{2}$$

- Per il condensatore:

$$i(t) = C\frac{dv(t)}{dt} \tag{3}$$

Per rendere comprensibili alcune delle considerazioni sviluppate in questo paragrafo, si richiamano gli elementi essenziali di **calcolo differenziale**, approfonditi nel corso di Matematica; per le esigenze attuali, si forniscono alcune definizioni, facendo riferimento alla *variabile indipendente tempo t*.

Derivata

Se $y = f(t)$ è una funzione reale del tempo, definita in un intervallo I, si definisce:

- *incremento della variabile indipendente t* la differenza $\Delta t = t_2 - t_1$, tra due valori appartenenti all'intervallo;
- *incremento della funzione* la differenza tra i valori di $f(t)$ nei punti t_2 e t_1, cioè: $\Delta f(t) = f(t_2) - f(t_1)$;
- *rapporto incrementale* di $f(t)$ nel punto t_1 il rapporto $\Delta f(t)/\Delta t$;
- *derivata* della funzione $f(t)$ nel punto t_1 il limite (se esiste) del rapporto incrementale, quando Δt tende a 0, ovvero l'incremento della variabile indipendente diviene infinitamente piccolo.

Se una funzione è derivabile in un intervallo, senza specificare il punto di derivazione t_1, la derivata si indica con:

$$y' = f'(t) = \frac{df(t)}{dt}$$

La lettera d, utilizzata in luogo di Δ, indica un incremento infinitamente piccolo e l'espressione:

$f'(t)\,dt$ costituisce il *differenziale della funzione*.

Pur senza entrare nelle regole per il calcolo delle derivate, è immediato comprendere che:

- *la derivata di una costante è nulla*: in effetti, se $f(t)$ ha valore costante nell'intervallo I, la differenza tra due valori da essa assunti nell'intervallo è nulla perché tali valori sono eguali tra loro.

Integrale

- *Funzione primitiva* di una funzione del tempo $y = f(t)$ definita in un intervallo I, è quella funzione $F(t)$, definita nel medesimo intervallo, la cui derivata prima è $f(t)$.

questo significa che: $f(t)=\dfrac{dF(t)}{dt}$;

- *Integrale indefinito* di una funzione $f(t)$ è l'insieme di tutte le primitive $F(t) + C$ della funzione data e si indica:

$$F(t)+C=\int f(t)dt \quad \text{ovvero:} \quad F(t)=\int f(t)dt-C$$

La presenza della costante C nella espressione della primitiva è giustificata dal fatto che la derivata di una costante è nulla. Da questo discende infatti che una $f(t)$ ammette infinite primitive, ciascuna per un diverso valore della costante.

Equazioni differenziali

Prendono il nome di *equazioni differenziali* quelle equazioni che contengono funzioni incognite, variabili indipendenti e derivate delle funzioni incognite.

Ad esempio la relazione:

$$g(t) = a\,f(t) + b\frac{df(t)}{dt}$$

è una equazione differenziale ordinaria, perché contiene:

- la variabile indipendente t (tempo);
- la funzione $f(t)$;
- la derivata $\dfrac{df(t)}{dt}$ della funzione.

Si definisce *soluzione* o *integrale* di una equazione differenziale, una funzione che, sostituita nell'equazione, la trasforma in una identità.

Una equazione diviene integro-differenziale quando in essa è presente anche l'integrale della funzione $f(t)$.

Condensatore

In un condensatore, la capacità C è definita come il rapporto istantaneo tra la quantità di carica $q(t)$ e la tensione $v(t)$ che, grazie a tale carica, si stabilisce ai capi del condensatore:

$$C=\frac{q(t)}{v(t)} \tag{4}$$

La corrente è la quantità di carica che passa in una sezione di conduttore nell'unità di tempo; dovendo esprimere una corrente che varia nel tempo $i(t)$, la si indica in forma differenziale, come rapporto tra la variazione della quantità di carica $dq(t)$ e quella del tempo dt, cioè :

$$i(t)=\frac{dq(t)}{dt}$$

Questa espressione, riferita ad *un valore istantaneo*, costituisce la derivata della quantità di carica nel tempo.

È pertanto possibile esprimere la quantità di carica in funzione della corrente, utilizzando il concetto di integrale: $q(t)=\int i(t)dt$ a meno di eventuali costanti. Sostituendo nella (4):

$$C=\frac{q(t)}{v(t)}=\frac{\int i(t)dt}{v(t)}$$

da cui si ottiene, per il condensatore:

$$v(t)=\frac{1}{C}\int i(t)dt \quad \text{equivalente a} \quad i(t)=C\frac{dv(t)}{dt}$$

Induttore

La tensione ai capi di un induttore d'induttanza L, determinata dal fenomeno di autoinduzione quando viene percorso da una corrente variabile $i(t)$, vale:

$$v(t)=L\frac{di(t)}{dt}$$

Utilizzando il concetto d'integrale (a meno di eventuali costanti):

$$i(t)=\frac{1}{L}\int v(t)dt$$