

Approfondimenti sui diagrammi di Bode

L'espressione (4.24) di una funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \dots + a_0}{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_0}$$

può essere riscritta nel seguente modo:

$$G(s) = K \frac{(-z_1)(-z_2)\dots(-z_m) \left(1 - \frac{s}{z_1}\right)\left(1 - \frac{s}{z_2}\right)\dots\left(1 - \frac{s}{z_m}\right)}{(-p_1)(-p_2)\dots(-p_n) \left(1 - \frac{s}{p_1}\right)\left(1 - \frac{s}{p_2}\right)\dots\left(1 - \frac{s}{p_n}\right)}$$

e chiamando K_B la nuova costante (ottenuta moltiplicando K per il prodotto degli zeri reali e non nulli cambiati di segno diviso il prodotto tra i poli reali e non nulli cambiati di segno) si ricava:

$$G(s) = K_B \frac{\left(1 - \frac{s}{z_1}\right)\left(1 - \frac{s}{z_2}\right)\dots\left(1 - \frac{s}{z_m}\right)}{\left(1 - \frac{s}{p_1}\right)\left(1 - \frac{s}{p_2}\right)\dots\left(1 - \frac{s}{p_n}\right)} \quad (1)$$

Ponendo $s = j\omega$ si ottiene l'espressione della risposta in frequenza:

$$G(j\omega) = K_B \frac{\left(1 - j\frac{\omega}{z_1}\right)\left(1 - j\frac{\omega}{z_2}\right)\dots\left(1 - j\frac{\omega}{z_m}\right)}{\left(1 - j\frac{\omega}{p_1}\right)\left(1 - j\frac{\omega}{p_2}\right)\dots\left(1 - j\frac{\omega}{p_n}\right)} \quad (2)$$

Nel caso in cui la funzione di trasferimento presenti uno zero o un polo nullo (nell'origine), dall'espressione (4.24) si deduce che al numeratore o al denominatore della $G(j\omega)$ sarà presente un termine $j\omega$.

Ci si riferisce al caso di rete stabile con *zeri e poli reali negativi o nulli* e quindi:

$$z_i \leq 0; \quad p_i \leq 0$$

Cambiando il segno a zeri e poli si ottengono valori positivi, corrispondenti a pulsazioni, la cui conoscenza è utile per la costruzione dei diagrammi asintotici:

$$\omega_{z_i} = -z_i \quad ; \quad \omega_{p_i} = -p_i$$

Si può quindi scrivere:

$$G(j\omega) = K_B \frac{\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_{z_1}}\right)\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_{z_2}}\right)\dots\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_{z_m}}\right)}{\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_{p_1}}\right)\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_{p_2}}\right)\dots\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_{p_n}}\right)} \quad (3)$$

A volte è utile riscrivere la (3) esplicitando le costanti di tempo τ_i della rete:

$$G(j\omega) = K_B \frac{(1 + j\omega\tau_{z_1})(1 + j\omega\tau_{z_2}) \dots (1 + j\omega\tau_{z_m})}{(1 + j\omega\tau_{p_1})(1 + j\omega\tau_{p_2}) \dots (1 + j\omega\tau_{p_n})} \quad (4)$$

dove $\tau_{z_i} = \frac{1}{\omega_{z_i}} = -\frac{1}{z_i}$ e $\tau_{p_i} = \frac{1}{\omega_{p_i}} = -\frac{1}{p_i}$.

Ricavando il modulo della risposta in frequenza (3) si ottiene la risposta in ampiezza del quadripolo. Nell'espressione del modulo compare il valore assoluto della costante K_B e il modulo di ciascun numero complesso compreso tra le parentesi al numeratore e al denominatore:

$$|G(j\omega)| = |K_B| \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_{z_1}}\right)^2} \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_{z_2}}\right)^2} \dots \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_{z_m}}\right)^2}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_{p_1}}\right)^2} \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_{p_2}}\right)^2} \dots \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_{p_n}}\right)^2}} \quad (5)$$

Esprimendo in decibel la risposta in ampiezza, si ottiene, grazie alle proprietà dei logaritmi, la seguente espressione:

$$\begin{aligned} |G(j\omega)|_{\text{dB}} = 20 \log |G(j\omega)| = 20 \log |K_B| + 20 \log \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_{z_1}}\right)^2} + \dots + \\ + 20 \log \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_{z_m}}\right)^2} - 20 \log \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_{p_1}}\right)^2} - \dots - 20 \log \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_{p_n}}\right)^2} \end{aligned} \quad (6)$$

Dalla risposta in frequenza (3) si ricava l'espressione della risposta in fase del quadripolo:

$$\begin{aligned} \angle G(j\omega) = \angle K_B + \angle\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_{z_1}}\right) + \dots + \angle\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_{z_m}}\right) - \angle\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_{p_1}}\right) - \dots - \\ - \angle\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_{p_n}}\right) = \angle K_B + \text{arctg} \frac{\omega}{\omega_{z_1}} + \dots + \text{arctg} \frac{\omega}{\omega_{z_m}} - \text{arctg} \frac{\omega}{\omega_{p_1}} - \dots - \text{arctg} \frac{\omega}{\omega_{p_n}} \end{aligned} \quad (7)$$

Funzioni con zeri e poli complessi coniugati

Alle cinque funzioni elementari appena studiate si aggiungono i due casi di funzione con coppie di zeri o coppie di poli complessi coniugati.

Nella analisi compiuta sino ad ora, la forma normale dei polinomi del 2° ordine presenti al numeratore $N(s)$ o al denominatore $D(s)$ della funzione di trasferimento, è stata espressa come:

$$F(s) = s^2 + a \cdot s + b$$

Sovente, specie nel caso di polinomio a radici complesse coniugate, si ricorre ad una forma normale che, quando $F(s)$ corrisponde al denominatore della funzione di trasferimento [$F(s) \equiv D(s)$], pone in evidenza due parametri che risultano di notevole importanza nell'analisi del quadripolo. Tale forma è:

$$F(s) = s^2 + 2\xi\omega_0 \cdot s + \omega_0^2 \quad (8)$$

La corrispondenza tra i parametri delle due espressioni precedenti è data da:

$$b = \omega_0^2 \Leftrightarrow \omega_0 = \sqrt{b} \quad (9)$$

$$a = 2\xi\omega_0 \Leftrightarrow \xi = \frac{a}{2\sqrt{b}} \quad (10)$$

dove ω_0 : *pulsazione propria non smorzata, o pulsazione naturale*; ξ : *smorzamento*.

Ricavando i poli dalla (8), si ottiene:

$$p_{1,2} = -\omega_0(\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1}) \quad (11)$$

La relazione tra la pulsazione propria non smorzata ed i poli è:

$$\omega_0 = \sqrt{b} = \sqrt{p_1 \cdot p_2}$$

La relazione tra lo smorzamento ed i poli è:

$$\xi = \frac{a}{2\sqrt{b}} = \frac{p_1 + p_2}{2\sqrt{p_1 \cdot p_2}}$$

Come tutte le equazioni di 2° grado, la (8) ammette due radici, la cui natura dipende dal segno del discriminante ($\xi^2 - 1$); considerando che lo smorzamento ξ non può assumere valori negativi, risulta:

- se $\xi > 1$ si hanno due poli reali e distinti, i cui valori sono forniti dalla (11);
- se $\xi = 1$ si hanno due poli reali e coincidenti: $p_{1,2} = -\omega_0$;
- se $\xi < 1$ si hanno due poli complessi coniugati.

PROCEDIMENTO

Per tracciare i diagrammi di Bode nel caso in cui il numeratore o il denominatore della $G(s)$ comprendano polinomi di secondo grado con radici complesse coniugate, occorre:

- 1) portare i polinomi stessi alla forma normale (8), rendendo unitario il coefficiente del termine s^2 ;
- 2) raccogliere a fattore il termine ω_0^2 , ottenendo l'espressione:

$$F(s) = \omega_0^2 \left[\frac{s^2}{\omega_0^2} + 2\xi \frac{s}{\omega_0} + 1 \right] \quad (12)$$

- 3) il termine ω_0^2 costituisce un fattore (nel caso sia al numeratore), o un divisore (nel caso sia al denominatore), della costante K_B ; si effettua la rappresentazione della parte residua di $F(s)$, contenuta tra le parentesi quadre della (12).

1) Zeri complessi coniugati

Per effettuare l'analisi nel dominio della frequenza, si sostituisce s con $j\omega$ nella (12) e la funzione da analizzare risulta:

$$F(j\omega) = \omega_0^2 \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + 2j\xi \frac{\omega}{\omega_0} \right)$$

Considerando ω_0^2 incluso nella costante K_B , si analizza modulo ed argomento della parte residua, che è costituita da una espressione complessa ove:

$$\text{parte reale} = 1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}; \quad \text{coefficiente dell'immaginario} = 2\xi \frac{\omega}{\omega_0}$$

Modulo:

$$\begin{aligned} M_{\text{dB}} &= 20 \log \sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right) \right]^2 + 4\xi^2 \cdot \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2} = \\ &= 10 \log \left[1 - \left(\frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right) \right]^2 + 4\xi^2 \cdot \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \end{aligned}$$

Nel caso dei poli complessi coniugati, è opportuno analizzare sia l'andamento asintotico che quello reale del modulo della funzione, determinando il valore di $M(j\omega)_{\text{dB}}$ per alcuni valori rilevanti di ω :

$$[M_{\text{dB}}]_{\omega \rightarrow 0} = 10 \log 1 = 0$$

$$[M_{\text{dB}}]_{\omega \rightarrow \infty} \text{ tende a } 10 \log \left(\frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right)^2$$

perché questo termine cresce più rapidamente degli altri al tendere di ω all' ∞ ; si ha quindi:

$$M_{\text{dB}} \rightarrow 40 \log \omega - 40 \log \omega_0$$

Nel sistema di coordinate in cui è tracciato il diagramma di Bode del modulo, l'espressione ricavata è una retta di equazione $y = mx + q$, con:

- ordinata all'origine: $q = -40 \log \omega_0$;
- pendenza: $m = 40 \text{ dB/decade}$;
- intersez. con asse x : $\omega = \omega_0$.

Se ne conclude che il diagramma asintotico di Bode del modulo di una coppia di zeri complessi coniugati è costituito da una spezzata di due semirette, di cui una coincide con l'asse delle ascisse da $\omega = 0$ ad $\omega = \omega_0$; l'altra inizia da $\omega = \omega_0$ e sale con pendenza di 40 dB/decade, per $\omega \rightarrow \infty$ (FIGURA 1).

Lo scostamento tra il diagramma reale e quello asintotico in questo caso non è fisso, come accade per gli zeri reali, ma dipende dal valore di ξ . In particolare, il punto in cui la differenza tra la spezzata asintotica e la curva reale è massima si ha per $\omega = \omega_0$; in effetti:

- nella spezzata asintotica: $[M_{\text{dB}}]_{\omega_0} = 0$
- nella curva reale: $[M_{\text{dB}}]_{\omega_0} = 20 \log 2\xi$

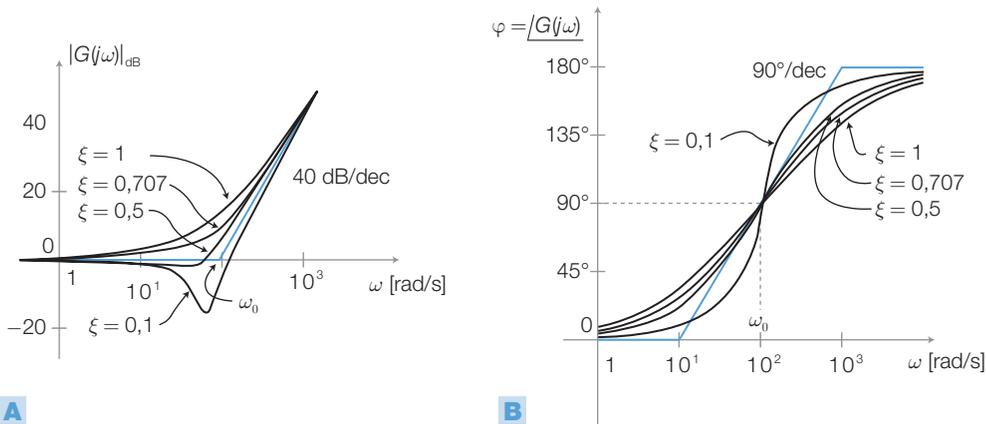


FIGURA 1 Diagrammi di Bode di una coppia di zeri complessi coniugati ($\xi < 1$).

Il valore di $[M_{dB}]_{\omega_0}$ non è il punto di minimo delle curve reali; in effetti si può dimostrare che la pulsazione corrispondente al modulo minimo è:

$$\omega_m = \omega_0 \cdot \sqrt{1-2\xi} \quad \text{per cui risulta:} \quad [M_{dB}]_{\omega_m} = 20 \log 2\xi \cdot \sqrt{1-\xi^2} \quad (13)$$

Argomento:

$$\varphi = \arctg \frac{\text{Im}}{\text{Re}} = \arctg \frac{2 \cdot \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

La rappresentazione asintotica dell'argomento è costituita da una spezzata in tre parti:

- una semiretta coincidente con l'asse delle ascisse da $\omega = 0$ ad $\omega = 0,1\omega_0$;
- un segmento che si stacca dall'asse delle ascisse nel punto $\omega = 0,1\omega_0$ e sale con pendenza di 90° per decade, assumendo il valore $\varphi = 90^\circ$ per $\omega = \omega_0$ e terminando a $\varphi = 180^\circ$ per $\omega = 10\omega_0$;
- una semiretta parallela all'asse delle ascisse in corrispondenza di $\varphi = 180^\circ$, che inizia da $\omega = 10\omega_0$ e prosegue per $\omega \rightarrow \infty$.

Anche il diagramma reale dell'argomento si discosta da quello asintotico di una quantità che dipende dal valore di ξ , come riportato nella FIGURA 1.

2) Poli complessi coniugati

L'andamento dei diagrammi di Bode, nel caso di poli complessi coniugati, è simmetrico a quello degli zeri rispetto all'asse delle ascisse.

Valgono pertanto le considerazioni matematiche effettuate per gli zeri, grazie alle quali si giustificano gli andamenti dei diagrammi nella FIGURA 2.

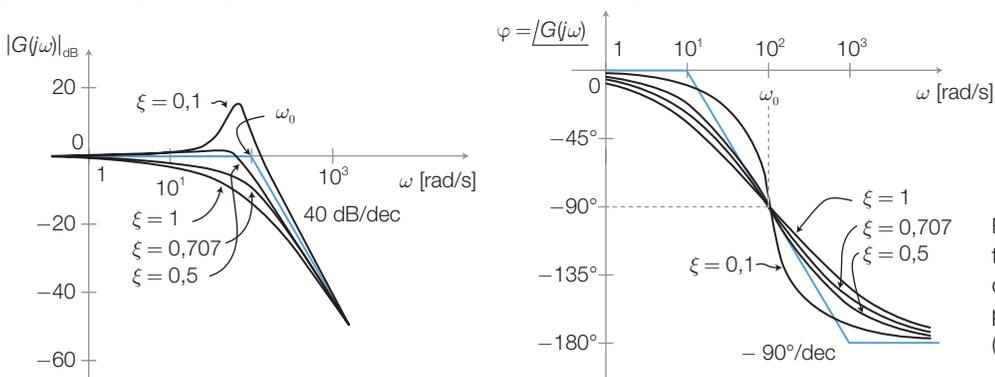


FIGURA 2 Funzioni di trasferimento e diagrammi di Bode di una coppia di poli complessi coniugati ($\xi < 1$).