

La funzione di trasferimento del PLL

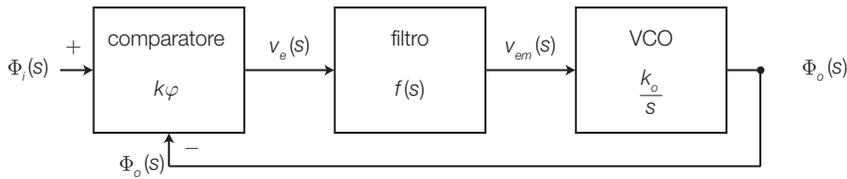


FIGURA 1 Struttura del PLL nel dominio di s .

Si ricava la *funzione di trasferimento* $T(s)$ del PLL, considerando $\phi_i(t)$ come segnale d'ingresso e $\phi_o(t)$ come segnale d'uscita (FIGURA 1), le cui rispettive trasformate di Laplace sono indicate con $\Phi_i(s)$ e $\Phi_o(s)$.

La f.d.t. del comparatore è espressa dal guadagno di conversione:

$$K_\phi = \frac{V_e(s)}{\Phi_o(s) - \Phi_i(s)} \quad (1)$$

Si indica con $F(s)$ la f.d.t. del filtro passa-basso.

La f.d.t. del VCO si ricava trasformando con Laplace la relazione che lega ingresso e uscita:

$$\omega_o(s) = K_o V_{em} \quad (2)$$

ma essendo la relazione tra pulsazione e fase:

$$\omega_o = \frac{d\phi_o}{dt} \quad (3)$$

che trasformata con Laplace fornisce:

$$\omega_o(s) = s\Phi_o(s) \quad (4)$$

sostituendo la (4) nella (2), si ottiene la f.d.t. del VCO:

$$\frac{\Phi_o(s)}{V_{em}(s)} = \frac{K_o}{s} \quad (5)$$

Inserendo le f.d.t. dei singoli blocchi nell'espressione generica della f.d.t. di un sistema retroazionato e considerando che per il blocco di retroazione vale $\beta(s) = 1$, si ottiene:

$$T(s) = \frac{\Phi_o(s)}{\Phi_i(s)} = \frac{A(s)}{1 + \beta(s)A(s)} = \frac{K_\phi K_o F(s)}{s + K_\phi K_o F(s)} \quad (6)$$

Si noti come la f.d.t. del PLL dipende da quella del filtro.

Impiegando il filtro RC ad un polo, adatto per impieghi a larga banda, la cui f.d.t. è data da:

$$F(s) = \frac{1}{1 + sRC}$$

si ottiene la f.d.t. complessiva del PLL:

$$T(s) = \frac{\Phi_o(s)}{\Phi_i(s)} = \frac{\frac{K_\phi K_o}{RC}}{s^2 + \frac{s}{RC} + \frac{K_\phi K_o}{RC}} \quad (7)$$

Confrontando la (7) con la f.d.t. generica di un filtro passa-basso del 2° ordine:

$$G(s) = \frac{A_0 \omega_n^2}{s^2 + 2\xi \omega_n s + \omega_n^2} \quad (8)$$

si ricava l'espressione della *pulsazione naturale*:

$$\omega_n = \sqrt{K_\phi K_o \omega_t} \quad (9)$$

e dello *smorzamento*

$$\xi = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\omega_t}{K_\phi K_o}} \quad (10)$$

dove:

$$\omega_t = \frac{1}{RC} \quad (11)$$

rappresenta la pulsazione di taglio del filtro passa-basso.

Con un procedimento analogo si ricavano le espressioni di ω_n e ξ nel caso del filtro con polo e zero (R_1, R_2, C) preferito per le applicazioni a banda stretta:

$$\omega_n = \sqrt{K_\phi K_o \omega_t} \quad \text{dove} \quad \omega_t = \frac{1}{(R_1 + R_2)C} \quad (12)$$

$$\xi = \frac{\omega_n}{2} \left(R_2 C + \frac{1}{K_\phi K_o} \right) \approx \frac{\omega_n}{2} R_2 C \quad (13)$$

La pulsazione a -3 dB per entrambi i filtri è data da:

$$\omega_{-3\text{dB}} = \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2 + \sqrt{(1 - 2\xi^2)^2 + 1}} \quad (14)$$

Si noti come i valori della pulsazione naturale ω_n e dello smorzamento ξ (e quindi della larghezza di banda $\omega_{-3\text{dB}}$) del sistema sono dipendenti dalla pulsazione di taglio ω_t del filtro passa-basso.