I sistemi termici

La resistenza termica

Se due corpi aventi temperature diverse vengono messi a contatto, si ha un passaggio di quantità di calore dal corpo a temperatura maggiore verso quello a temperatura minore, fino al raggiungimento dell'equilibrio termico.

La trasmissione del calore avviene:

- *per conduzione*: si ha essenzialmente nei solidi, ove la trasmissione del calore avviene per trasferimento di energia cinetica tra le molecole dei corpi a contatto, dalla zona a temperatura maggiore, verso quella a temperatura minore;
- *per convezione*: si realizza attraverso un fluido che, muovendosi, trasporta l'energia termica dal corpo a temperatura maggiore (sorgente) verso quello a temperatura minore;
- *per irraggiamento*: il trasporto avviene attraverso onde elettromagnetiche ed è possibile anche nel vuoto.

Sviluppando esempi di controllo elettronico di sistemi di riscaldamento, si fa riferimento unicamente alla trasmissione *per conduzione* nei solidi.

L'obiettivo è definire un legame matematico (*modello*), tale che sia possibile dimensionare il riscaldatore ed il relativo controllo, conoscendo i parametri del sistema da riscaldare.

Si considera un corpo solido a forma di parallelepipedo, di spessore d [m] e facce maggiori con superficie S [m^2], tale che sia T_1 la temperatura su una delle facce maggiori e T_2 quella sull'altra, con $T_1 > T_2$ (FIGURA **1A**).

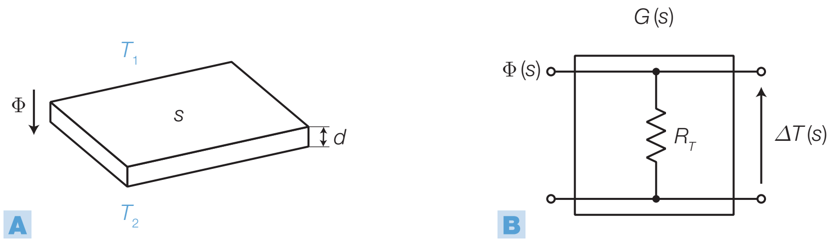

FIGURA **1** **A)** Conduzione di calore attraverso una superficie; **B)** modello equivalente della resistenza termica.

Flusso termico Φ: rappresenta la quantità di calore che si trasferisce dalla faccia a temperatura maggiore a quella a temperatura minore nell'unità di tempo.

Se si indica con ΔQ la variazione della quantità di calore tra le due facce del solido e con Δt l'intervallo di tempo in cui si ha tale variazione, il *flusso termico* vale: $\Phi = \dfrac{\Delta Q}{\Delta t} \left[\dfrac{\mathrm{J}}{\mathrm{s}} = \mathrm{W}\right]$.

Il flusso termico è legato alle caratteristiche fisiche del corpo attraverso il quale avviene la conduzione dalla relazione:

$$\Phi = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = k \cdot \frac{S}{d} \cdot (T_2 - T_1) \qquad (1)$$

Il termine k viene definito *conducibilità termica*, perché ha valore elevato nei buoni conduttori di calore e basso negli isolanti e si misura in joule su secondi per kelvin per metro: $\left[\dfrac{\mathrm{J}}{\mathrm{s \cdot K \cdot m}}\right]$.

La (**1**) esprime variazioni che avvengono in funzione del salto termico $\Delta T(t) = T_2 - T_1$ [K] (kelvin) e del tempo; per una corretta formulazione del modello matematico, è opportuno definire le grandezze in funzione del tempo, considerando i valori istantanei, ovvero: $\Delta t \rightarrow 0 \Rightarrow \mathrm{d}t$ (differenziale del tempo).

In tal modo, la (**1**) diviene:

$$\Phi(t) = \frac{\mathrm{d}Q(t)}{\mathrm{d}t} = k \cdot \frac{S}{d} \cdot \Delta T(t) \qquad (2)$$

Resistenza termica di conduzione: è il termine $R_T = \dfrac{d}{k \cdot S}$ $\left[\dfrac{\mathrm{s \cdot K}}{\mathrm{J}}\right]$ nella (**2**). La resistenza termica è bassa nei conduttori ed alta negli isolanti; sostituendo nella (**2**), si ottiene: $\Phi(t) = \dfrac{\mathrm{d}Q(t)}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{R_T} \cdot \Delta T(t)$

Il modello rappresentato dalla (**2**) definisce un legame tra il flusso termico $\Phi(t)$ e il salto termico $\Delta T(t)$ ed anche una relazione differenziale tra la quantità di calore $Q(t)$ ed il tempo t.

È opportuno quindi fare uso della trasformata di Laplace, allo scopo di esprimere la funzione di trasferimento di un sistema che trasferisce calore per conduzione.

Nella funzione di trasferimento, la grandezza d'uscita è il *salto termico* e quella d'ingresso è la *quantità di calore* trasferita.

Indicando con:

- $\Delta T(s) = L\,[\Delta(t)]$ la L-trasformata del salto termico;
- $\Phi(\mathrm{s}) = L\,[\Phi(t)]$ la L-trasformata del flusso termico;
- $Q(s) = L[Q(t)]$ la L-trasformata della quantità di calore trasferita.

Ricordando il teorema della derivata di Laplace, per cui $\dfrac{\mathrm{d}Q(t)}{\mathrm{d}t} = s \cdot Q(s)$ e dalla formula (**2**) risulta:

$$\Phi(s) = s \cdot Q(s) = \frac{\Delta T(s)}{R_T} \qquad (3)$$

Dalla (**3**) si può ricavare la funzione di trasferimento del sistema che trasmette calore per conduzione; risulta:

$$G(s) = \frac{\Delta T(s)}{\Phi(s)} = R_T \qquad (4)$$

e coincide con la resistenza termica del sistema.

Se ne conclude che, nella modellizzazione matematica espressa dalla (**4**), la trasmissione di calore per conduzione attraverso una superficie nota può essere schematizzata mediante una resistenza R_T, se come grandezza d'uscita (tensione) si considera il salto termico e come grandezza d'ingresso (corrente) la quantità di calore trasferita nell'unità di tempo (FIGURA **1B**).

La capacità termica

Si definisce *capacità termica* la quantità di calore che deve essere fornita a un corpo affinché la sua temperatura aumenti di 1 kelvin [K].

Sulla base della precedente definizione, la capacità termica C_T è data dalla relazione:

$$C_T = \frac{\Delta Q}{\Delta T} \qquad (5)$$

ove si è indicato con:

- $\Delta T = T_2 - T_1$ [K] l'incremento di temperatura subito dal corpo che, assorbendo calore, si porta dalla temperatura iniziale T_1 a quella finale T_2 (con $T_2 > T_1$);
- ΔQ la quantità di calore [J] assorbita dal corpo.

La *capacità termica* è una caratteristica fisica del corpo, legata alla massa M [kg] e al calore specifico $c\left[\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{K}}\right]$ del materiale con cui è costruito il corpo, attraverso la relazione: $C_T = M \cdot c$.

Come nel caso della resistenza termica, allo scopo di realizzare il modello del comportamento termico di un corpo, occorre trasformare la relazione (**5**), che è riferita a variazioni finite di temperatura e di quantità di calore (indicate con Δ), in una relazione tra variazioni infinitesime (indicate con d), cioè:

$$C_T = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}T} \qquad (6)$$

Si elabora la (**6**) evidenziando la dipendenza delle grandezze dal tempo e moltiplicando poi ambo i membri per dT e dividendoli per dt; si ottiene:

$$\frac{\mathrm{d}Q(t)}{\mathrm{d}t} = C_T \cdot \frac{\mathrm{d}T(t)}{\mathrm{d}t} \qquad (7)$$

Analizzando la resistenza termica, si è individuato che: $\Phi(t) = \frac{\mathrm{d}Q(t)}{\mathrm{d}t}$ rappresenta il *flusso termico*; pertanto:

$$\Phi(t) = C_T \cdot \frac{\mathrm{d}T(t)}{\mathrm{d}t}$$

La relazione è di tipo differenziale e per individuare la funzione di trasferimento del sistema, si fa uso delle L-trasformate, ottenendo:

$$\Phi(s) = C_T \cdot s \cdot T(s)$$

La funzione di trasferimento, intesa come rapporto tra il *salto termico* (grandezza d'uscita) e il *flusso termico* assorbito dal corpo (grandezza d'ingresso), è:

$$G(s) = \frac{T(s)}{\Phi(s)} = \frac{1}{s \cdot C_T} \qquad (8)$$

Il modello di un sistema termico

Realizzando una analogia tra un sistema termico ed uno elettrico, la resistenza termica è stata rappresentata con una resistenza posta in derivazione tra la grandezza d'ingresso (flusso termico) e quella d'uscita (salto termico), come in FIGURA **1B**.

Nella stessa analogia, in base al risultato ottenuto con la (**8**), la capacità termica può essere rappresentata con un condensatore di capacità C_T, posto in parallelo a R_T.

Il modello corrisponde allo schema di FIGURA **2B** in cui il flusso termico è assimilato alla corrente di ingresso, mentre il salto termico corrisponde alla tensione d'scita.

La funzione di trasferimento $G(s)$ è:

$$G(s) = \frac{T(s)}{\Phi(s)} = R_T \;//\; \frac{1}{s \cdot C_T} = \frac{R_T}{s \cdot R_T C_T + 1}$$

Il risultato dimostra che il sistema considerato è del primo ordine con un polo, di valore $p = -1/\,C_T\,R_T$, pertanto ha comportamento filtrante di tipo passa-basso.

La caratteristica individuata consente di utilizzare un riscaldatore in modo on-off perché l'effetto filtrante garantisce una risposta esponenziale al gradino corrispondente all'accensione e spegnimento del riscaldatore, ovvero fornisce una temperatura *media* al corpo (o all'ambiente) riscaldato (FIGURA **2B**, **C**).

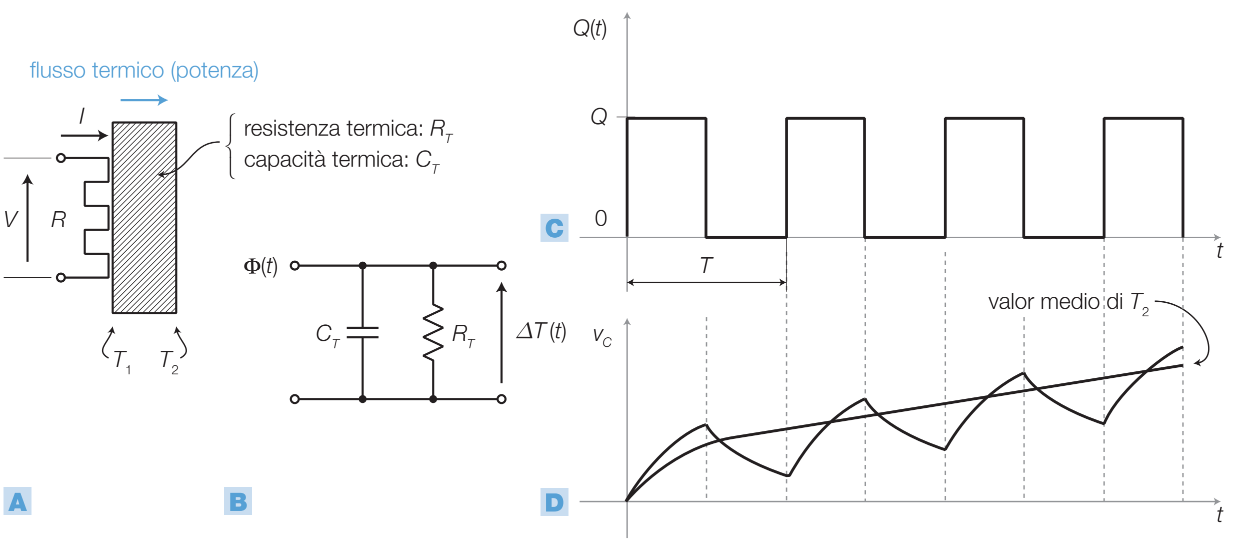

FIGURA **2 A)** Sistema costituito da un elemento scaldante e un corpo con resistenza termica R_T e capacità termica C_T: **B)** modello equivalente; **C)** andamento della quantità di calore prodotta dal riscaldatore alimentato con un'onda quadra di tensione; **D)** andamento della temperatura T_2.

ESEMPIO 1

Determinare la corrente che deve assorbire un resistore di riscaldamento avente resistenza $R = 100\ \Omega$, applicato ad una faccia di un corpo solido isolato termicamente, per fare in modo che la temperatura T_2 si porti dalla temperatura ambiente di $T_0 = 20$ °C, che aveva all'atto della accensione del riscaldatore, alla temperatura di 60 °C in 180 s.

Il corpo ha $R_T = 100\ \dfrac{\text{s} \cdot \text{K}}{\text{J}}$ e $C_T = 2000\ \dfrac{\text{J}}{\text{K}}$.

SOLUZIONE

Il problema si configura come l'analisi della risposta al gradino di un sistema del primo ordine con funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{T(s)}{\Phi(s)} = \frac{R_T}{s \cdot R_T C_T + 1} \qquad (9)$$

Il segnale d'ingresso a gradino è rappresentato dalla potenza $P = R\,I^2$,che il resistore di riscaldamento eroga all'atto della alimentazione; questa corrisponde al flusso termico Φ applicato al corpo di resistenza R_T e capacità C_T , pertanto, in forma L-trasformata, vale: $\Phi(s) = \dfrac{P}{s}$. La grandezza d'uscita è il salto termico desiderato $T(t) = 60 - 20 = 40$ °C, nell'intervallo di tempo $t = 180$ s. La (9) deve essere risolta in funzione del tempo; portandola in forma canonica, si ricava la risposta:

$$T(s) = \Phi(s) \cdot G(s) = \frac{P}{s} \cdot \frac{1}{C_T} \cdot \frac{1}{s + \dfrac{1}{R_T C_T}} \quad \text{ovvero:}$$

$$T(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{k}{s-p} \qquad (10)$$

avendo posto: $k = \dfrac{P}{C_T} \left[\dfrac{\text{K}}{\text{s}}\right]$ e $p = -\dfrac{1}{C_T R_T} = -\dfrac{1}{\tau}$ [s^{-1}].

La (10) costituisce la risposta al gradino di un sistema del 1° ordine e, antitrasformando, si ottiene:

$$T(t) = k \cdot \tau \cdot (1 - e^{-t/\tau})$$

Sostituendo, è possibile ricavare il valore di k e, dalla sua conoscenza, risalire a P:

- $k = P/C_T = 0{,}5 \cdot 10^{-3} \cdot P$;
- $T(t) = 40$ K: è un salto termico e può essere espresso indifferentemente in gradi centigradi o in kelvin;
- $t = 180$ s : è il tempo richiesto per ottenere il salto termico desiderato;
- $\tau = C_T R_T = 2 \cdot 10^5$ s : costante di tempo del sistema.

Risulta:

$$k = \frac{T(t)}{\tau \cdot (1 - e^{-t/\tau})} = \frac{40}{2 \cdot 10^5 \cdot (1 - e^{-180/2 \cdot 10^5})} = 0{,}222\ \text{K/s}$$

$$P = \frac{k}{0{,}5 \cdot 10^{-3}} = 464\ \ \text{W}$$

Infine:

$$I = \sqrt{\frac{Q}{R}} \approx 2{,}15\ \text{A}.$$