Principio dei lavori virtuali

Consideriamo un corpo di peso P, disposto su un piano perfettamente liscio, inclinato sull'orizzontale di un angolo α (FIGURA 1). Per ottenere il moto di salita uniforme, occorre applicare al corpo una forza F_m avente intensità pari alla componente di P secondo la direzione del piano:

$$F_m = F_1 = P \cdot \text{sen}\ \alpha$$

e, al termine della salita, la forza motrice avrà compiuto il lavoro:

$$L_m = P \cdot \text{sen}\ \alpha \cdot s$$

se con s si indica lo spazio percorso dal corpo.

Come ipotesi alternativa, supponiamo invece di sollevare direttamente il corpo all'altezza h, senza l'interposizione del piano inclinato. In questo caso il lavoro motore necessario è:

$$L_m = P \cdot h$$

ma dal triangolo rettangolo ABC si ricava $h = s \cdot \text{sen}\ \alpha$ e sostituendo:

$$L_m = P \cdot s \cdot \text{sen}\ \alpha$$

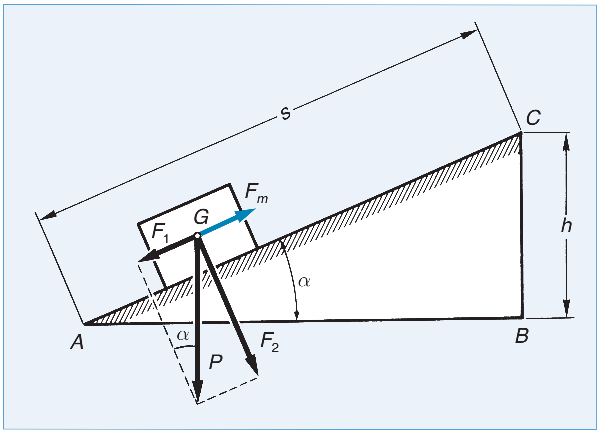
risultato che coincide con il precedente.

▶ Possiamo concludere affermando che il lavoro necessario per sollevare un peso (o vincere una qualsiasi forza resistente) è lo stesso, sia che il sollevamento venga operato direttamente, sia che si interponga una macchina semplice.

Acquisita tale conclusione, dall'espressione (10.12) del testo risulta chiaro che, rimanendo costante il lavoro L, l'impiego di una macchina semplice riduce la forza motrice necessaria, ma aumenta, di conseguenza, il relativo spostamento, cosa che avevamo già anticipato nel capitolo 5.

L'esempio descritto costituisce un caso particolare del **principio dei lavori virtuali**, dovuto a Lagrange, che permette di risolvere numerosi problemi di meccanica:

▶ Per un corpo (o un sistema di corpi rigidi) vincolato da vincoli perfettamente lisci in equilibrio, è nulla la somma algebrica dei lavori di tutte le forze applicate e delle reazioni dei vincoli, per un qualsiasi spostamento virtuale, piccolissimo e compatibile con i vincoli stessi del sistema.



1 Lavoro di sollevamento compiuto mediante una macchina semplice.

ESEMPIO DI APPLICAZIONE

Il principio dei lavori virtuali ha ampie possibilità di applicazione; una di queste potrebbe essere la ricerca delle reazioni dei vincoli, ricerca che è stata sempre realizzata con l'impiego delle tre equazioni della statica. Ricerchiamo, per esempio, le reazioni degli appoggi A e B della trave schematizzata in FIGURA **2**. Supponendo che l'appoggio B presenti un cedimento piccolissimo s, la trave ruoterà di un piccolissimo angolo α intorno al punto A; di conseguenza i punti di applicazione dei carichi P_1, P_2 e P_3 si abbasseranno di quantità piccolissime (s_1, s_2 e s_3), che costituiscono gli spostamenti. Per il principio dei lavori virtuali possiamo scrivere:

$$P_1 \cdot s_1 + P_2 \cdot s_2 + P_3 \cdot s_3 - R_b \cdot s = 0$$

I singoli spostamenti, espressi in funzione dell'angolo α, valgono [1]:

$$s_1 = \alpha \cdot a_1 \qquad s_2 = \alpha \cdot a_2 \qquad s_3 = \alpha \cdot a_3 \qquad s = \alpha \cdot l$$

e l'equazione precedente diventa:

$$P_1 \cdot \alpha \cdot a_1 + P_2 \cdot \alpha \cdot a_2 + P_3 \cdot \alpha \cdot a_3 - R_b \cdot \alpha \cdot l = 0$$

ossia:

$$P_1 \cdot a_1 + P_2 \cdot a_2 + P_3 \cdot a_3 - R_b \cdot l = 0$$

da cui si ottiene:

$$R_b = \frac{P_1 \cdot a_1 + P_2 \cdot a_2 + P_3 \cdot a_3}{l}$$

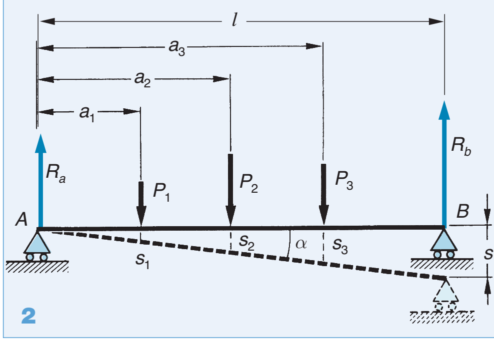
coincidente con la relazione già ottenuta nel capitolo 3. La reazione dell'appoggio A può essere ottenuta con lo stesso procedimento, oppure supponendo che si verifichi un cedimento s di ambedue i vincoli. In tale ipotesi, con riferimento alla FIGURA **3**, possiamo scrivere:

$$P_1 \cdot s_1 + P_2 \cdot s_2 + P_3 \cdot s_3 = R_a \cdot s_A + R_b \cdot s_B$$

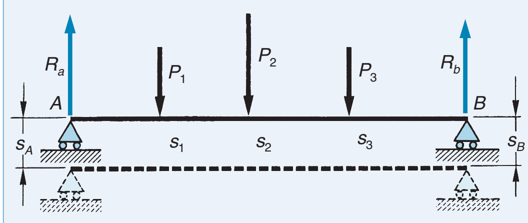
Essendo evidentemente tutti gli spostamenti uguali fra loro ($s_1 = s_2 = s_3 = \ldots s$) si ottiene in definitiva:

$$P_1 + P_2 + P_3 = R_a + R_b$$

che coincide con la vecchia formula ormai nota.



2



3

[1] In realtà ogni singolo spostamento s_i dovrebbe essere espresso in funzione della tangente dell'angolo α: $s_i = \text{tg}\,\alpha \cdot a_i$ Tuttavia, per α molto piccolo, non si commette errore sensibile sostituendo alla tangente il valore in radianti dell'angolo stesso.