

Momenti d'inerzia di figure geometriche semplici

Rettangolo

Per un rettangolo di base b e altezza h (FIGURA 1.a), si vuole calcolare il momento d'inerzia rispetto a un asse x_0 , baricentrico e parallelo alla base b . Premesso che la formula (11.1) del testo può essere posta nella forma:

$$I_{x_0} = \sum a_i \cdot y_i^2 = \sum a_i \cdot y_i \cdot y_i$$

e ricordando che

$$\sum a_i \cdot y_i = S_i$$

ne consegue:

$$I_{x_0} = \sum S_i \cdot y_i \quad (1)$$

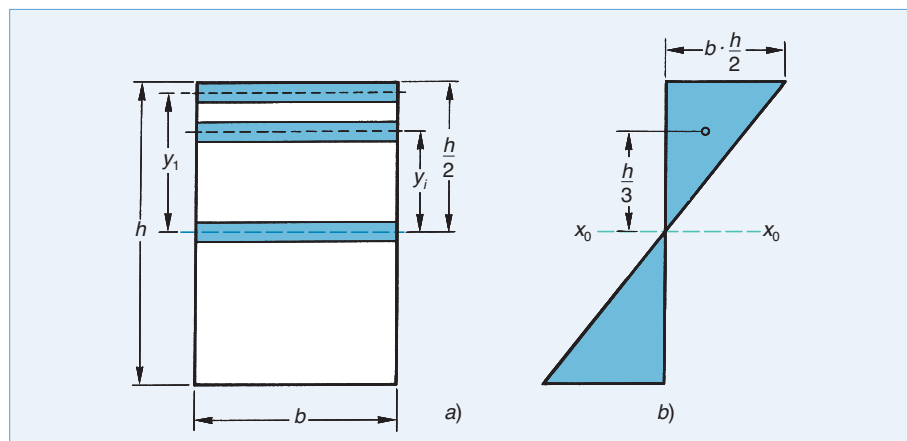
Pertanto il momento d'inerzia può essere interpretato come la sommatoria dei momenti dei singoli momenti statici, calcolati rispetto alla retta baricentrica x_0 prefissata. Ciò premesso, dividiamo il rettangolo in tante strisce orizzontali di altezza piccolissima e unitaria; in tale ipotesi, l'area di ciascuna striscia elementare vale $a_i = 1 \cdot b$ e il suo momento statico, rispetto all'asse baricentrico orizzontale x_0 , è espresso dalla relazione generica:

$$S_i = 1 \cdot b \cdot y_i = b \cdot y_i$$

nella quale le singole distanze y_i assumono valori diversi per ciascuna striscia, come è facile notare dalla figura. Per la prima striscia si può considerare che sia $y_1 \cong h/2$, con approssimazione tanto più valida quanto più sottili sono le varie strisce che costituiscono le aree elementari, per cui il relativo momento statico assume il valore:

$$S_1 = 1 \cdot b \cdot \frac{h}{2} = b \cdot \frac{h}{2}$$

Per le strisce successive non è possibile operare con altrettanta approssimazione, a eccezione della striscia centrale (attraversata dalla retta x_0) per la quale è $y_n = 0$ e



1 Procedimento semplificato per la valutazione del momento d'inerzia assiale baricentrico di un rettangolo.

quindi $S_n = 0$. Ne segue che i momenti statici delle singole aree elementari variano proporzionalmente alle distanze y_i , essendo costanti i valori delle aree stesse. È possibile perciò tracciare un diagramma di variazione di tali momenti (FIGURA 1.b), ottenendo, per la parte superiore, un triangolo, avente i cateti proporzionali rispettivamente a S (cioè a $b \cdot h/2$) e a $h/2$.

Se si assumono positive le distanze delle strisce situate sopra l'asse x_0 , e negative quelle delle strisce sottostanti, lo stesso diagramma si realizza, dalla parte opposta a x_0 , con valore negativo.

In base alla (1), per trovare il momento d'inerzia della metà superiore del rettangolo, occorrerebbe ripetere la suddivisione del diagramma dei momenti statici in tante strisce piccolissime e moltiplicare ciascuna striscia (momento statico elementare) per la rispettiva distanza y_i dall'asse x_0 .

Data l'impossibilità di individuare le singole distanze y_i , conviene applicare il teorema di Varignon (v. paragrafo 2 del capitolo 3) al diagramma triangolare. Con le notazioni della figura, l'area del triangolo superiore vale:

$$A_S = \frac{1}{2} \cdot b \cdot \frac{h}{2} \cdot \frac{h}{2} = b \cdot \frac{h^2}{8}$$

e la distanza del suo baricentro dall'asse x_0 :

$$y_G = \frac{2}{3} \cdot \frac{h}{2} = \frac{1}{3} \cdot h$$

per cui il momento d'inerzia di mezzo rettangolo è:

$$\frac{1}{2} \cdot I_{x_0} = A_S \cdot y_G = b \cdot \frac{h^2}{8} \cdot \frac{1}{3} \cdot h = \frac{b \cdot h^3}{24}$$

e per l'intero rettangolo:

$$I_{x_0} = \frac{b \cdot h^3}{12} \quad (2)$$

MOMENTO D'INERZIA DI UN RETTANGOLO RICAIVATO CON IL CALCOLO DIFFERENZIALE

Riteniamo utile citare anche il metodo di calcolo differenziale dello stesso momento d'inerzia; lo studente potrà riprendere in esame questo procedimento quando avrà acquisito le necessarie conoscenze matematiche. Consideriamo (FIGURA 2) una striscia di altezza infinitesima dy e di base b ; la sua area vale il prodotto $b \cdot dy$ e la sua distanza dall'asse baricentrico x_0 è pari a y . La (11.1) del testo diventa pertanto:

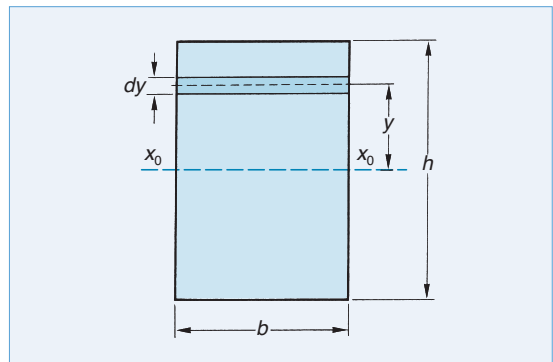
$$I_{x_0} = \int_{-h/2}^{+h/2} b \cdot y^2 \cdot dy$$

nella quale i valori di y possono variare nell'intervallo compreso tra $y = h/2$ e $y = -h/2$. Integrando si ottiene:

$$I_{x_0} = \left[\frac{1}{3} \cdot b \cdot y^3 \right]_{-h/2}^{+h/2}$$

e, assegnando alla variabile y i suddetti valori limite:

$$I_{x_0} = \frac{1}{3} \cdot b \cdot \left(\frac{h}{2}\right)^3 - \frac{1}{3} \cdot b \cdot \left(-\frac{h}{2}\right)^3$$

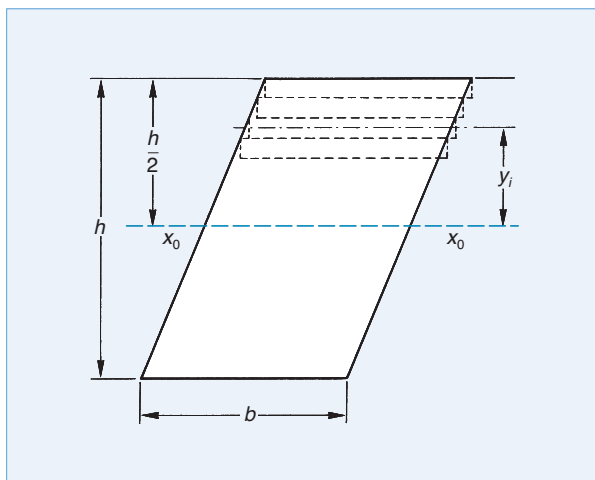


2 Calcolo del momento d'inerzia assiale baricentrico di un rettangolo con procedimenti di integrazione.

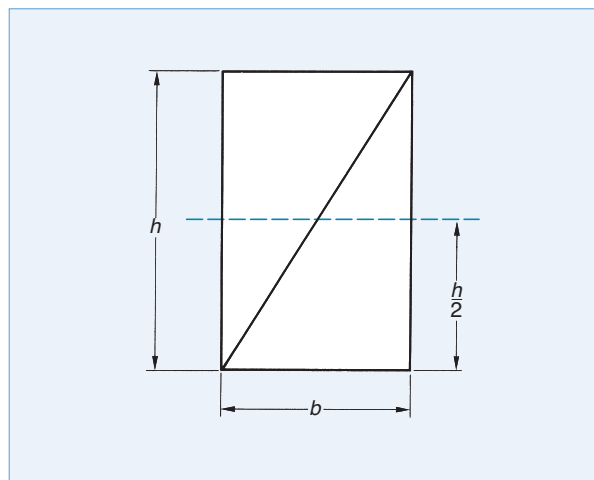
In definitiva si ottiene:

$$I_{x_0} = \frac{b \cdot h^3}{12}$$

risultato identico a quello conseguito con il metodo approssimato.



3 Momento d'inerzia baricentrico di un parallelogramma.



4 Momento d'inerzia di un triangolo rispetto a un asse passante a metà altezza.

Parallelogramma

Per un parallelogramma (FIGURA 3) di base b e altezza h , il momento d'inerzia rispetto all'asse baricentrico x_0 , parallelo alla base, ha la stessa espressione ottenuta per il rettangolo.

Il parallelogramma, infatti, può essere suddiviso in tante strisce di piccolissimo spessore, spostate orizzontalmente l'una rispetto all'altra, il che non altera minimamente il procedimento descritto per il rettangolo. Il momento d'inerzia risulta pertanto:

$$I_{x_0} = \frac{b \cdot h^3}{12}$$

non essendo cambiate né le aree elementari, né le rispettive distanze y_i . Per quanto riguarda l'asse verticale y_0 il procedimento non è applicabile, non essendo verificate le ipotesi prima fatte per il rettangolo. Il momento d'inerzia rispetto a tale asse dovrà essere valutato considerando il parallelogramma come una figura complessa, scomponibile in diverse figure semplici (rettangoli o triangoli) e applicando i procedimenti di calcolo che sono illustrati nel paragrafo 3 del testo.

Triangolo

Ogni rettangolo può essere diviso, mediante la diagonale, in due triangoli rettangoli (FIGURA 4). Il momento d'inerzia di ciascun triangolo, rispetto a un asse x , parallelo alla base e passante a metà altezza del triangolo stesso, vale ovviamente la metà di quello del rettangolo:

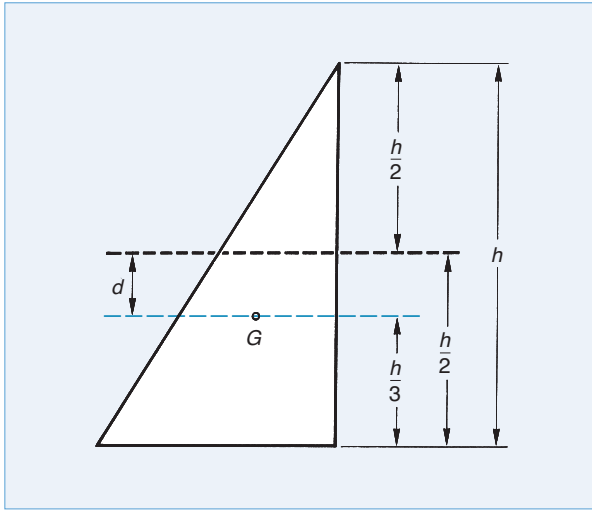
$$I_x = \frac{b \cdot h^3}{24} \quad (3)$$

Tale momento, naturalmente, non è un momento baricentrico, in quanto il baricentro di un triangolo si trova a $1/3$ dell'altezza partendo dalla base.

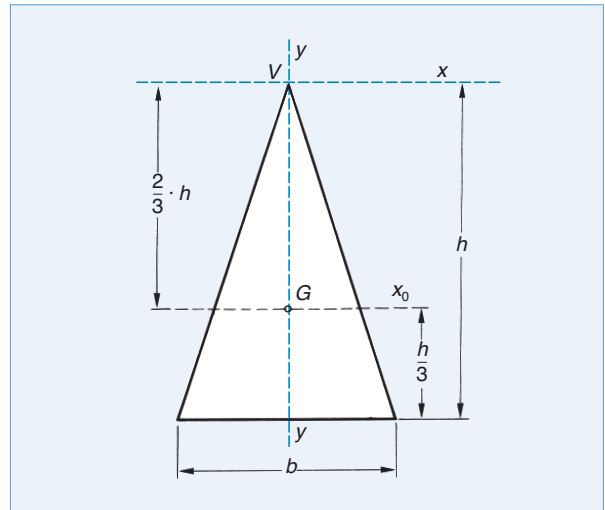
La (3), in ogni caso, è valida per tutti i triangoli, anche se non rettangoli.

Per la ricerca del momento d'inerzia rispetto all'asse baricentrico x_0 ci si avvale ancora della formula di trasposizione: $I_x = I_{x_0} + A \cdot d^2$, dalla quale si ricava:

$$I_{x_0} = I_x - A \cdot d^2$$



5 Momento d'inerzia baricentrico di un triangolo.



6 Momento d'inerzia polare rispetto al vertice di un triangolo.

Con le notazioni della FIGURA 5 è:

$$d = \frac{h}{2} - \frac{h}{3} = \frac{h}{6}$$

per cui risulta:

$$I_{x_0} = \frac{1}{24} \cdot b \cdot h^3 - \frac{b \cdot h}{2} \cdot \left(\frac{h}{6}\right)^2 = \frac{1}{24} \cdot b \cdot h^3 - \frac{1}{72} \cdot b \cdot h^3 = \frac{1}{36} \cdot b \cdot h^3$$

Per un triangolo, rispetto a un asse baricentrico e parallelo alla base, il momento d'inerzia è pertanto:

$$I_{x_0} = \frac{1}{36} \cdot b \cdot h^3 \quad (4)$$

Tale espressione è indipendente dalla forma del triangolo, purché b e h rappresentino rispettivamente la base e l'altezza dello stesso. Dalla (11.16), applicando ancora il teorema di trasposizione, si ottiene il momento d'inerzia rispetto alla base b del triangolo stesso:

$$\begin{aligned} I_b &= I_{x_0} + A \cdot d^2 = \frac{1}{36} \cdot b \cdot h^3 + \frac{b \cdot h}{2} \cdot \left(\frac{h}{3}\right)^2 = \\ &= \frac{1}{36} \cdot b \cdot h^3 + \frac{1}{18} \cdot b \cdot h^3 = \frac{1}{12} \cdot b \cdot h^3 \end{aligned}$$

► **Momento polare di un triangolo isoscele rispetto al vertice** Per la ricerca dei momenti d'inerzia del cerchio è di fondamentale importanza la conoscenza del momento polare rispetto al vertice V di un triangolo isoscele. Ricordando la (11.9) del testo $J_p = J_x + J_y$, occorre prima determinare i due momenti d'inerzia assiali rispetto alle rette x e y passanti per il vertice V . Con le notazioni della FIGURA 6, otteniamo:

$$\begin{aligned} I_x &= I_{x_0} + A \cdot d^2 = \frac{1}{36} \cdot b \cdot h^3 + \frac{b \cdot h}{2} \cdot \left(\frac{2}{3}h\right)^2 = \\ &= \frac{1}{36} \cdot b \cdot h^3 + \frac{4}{18} \cdot b \cdot h^3 = \frac{9}{36} \cdot b \cdot h^3 = \frac{1}{4} \cdot b \cdot h^3 \end{aligned}$$

Per quanto riguarda la ricerca di I_y , prendiamo in esame la metà del triangolo

dato (FIGURA 7); la retta y coincide con la base h di tale triangolo avente altezza pari a $b/2$. Ne consegue:

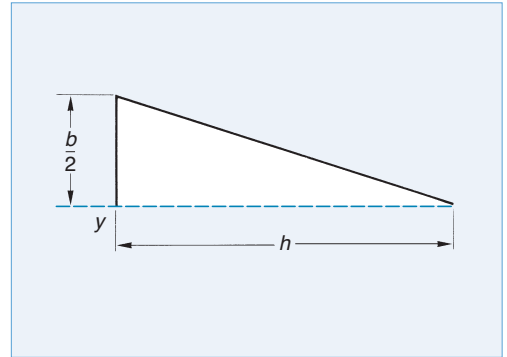
$$\frac{1}{2} \cdot I_y = \frac{1}{12} \cdot h \cdot \left(\frac{b}{2}\right)^3 = \frac{1}{12} \cdot h \cdot \frac{b^3}{8} = \frac{1}{96} \cdot h \cdot b^3$$

e per il triangolo completo:

$$I_y = \frac{1}{48} \cdot h \cdot b^3$$

Il momento polare rispetto al vertice V è quindi:

$$I_v = \frac{1}{4} \cdot b \cdot h^3 + \frac{1}{48} \cdot h \cdot b^3 \quad (5)$$



7 Momento d'inerzia rispetto all'asse y .

Cerchio

► **Momento d'inerzia polare baricentrico** Dividiamo il cerchio in n settori circolari di ampiezza piccolissima (FIGURA 8), in modo che ciascuno di essi possa essere assimilato, con sufficiente approssimazione, a un triangolo isoscele. Se tale ipotesi è verificata, ogni triangolo ha l'altezza $h \cong r$ e la base

$$b = \frac{2\pi \cdot r}{n}$$

cioè pari a $1/n$ dell'intera circonferenza. Tutti i triangoli hanno in comune il vertice, coincidente con il centro O del cerchio, per cui il momento d'inerzia polare del cerchio stesso, rispetto al proprio baricentro O , equivale alla somma dei momenti d'inerzia polari dei vari triangoli, valutati rispetto al vertice comune. Poiché tutti i triangoli sono uguali per costruzione, è $J_O = n \cdot J_v$, dove:

$$I_v = \frac{1}{4} \cdot b \cdot h^3 + \frac{1}{48} \cdot h \cdot b^3 \quad (6)$$

La (6) si può ulteriormente semplificare: il secondo termine del secondo membro è molto più piccolo del primo, in quanto la base b , per l'ipotesi fatta in precedenza, è piccolissima e figura alla terza potenza; inoltre il coefficiente numerico $1/48$ è notevolmente inferiore a quello del primo termine, cioè $1/4$. Concludendo, possiamo considerare trascurabile il secondo termine rispetto al primo e la (6) si riduce a:

$$I_v = \frac{1}{4} \cdot b \cdot h^3$$

Sostituendo a b e h i relativi valori, si ottiene il momento d'inerzia polare rispetto al baricentro O del cerchio:

$$I_O = n \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{2\pi \cdot r}{n} \cdot r^3$$

da cui segue, semplificando:

$$I_O = \frac{\pi}{2} \cdot r^4 \quad (7)$$

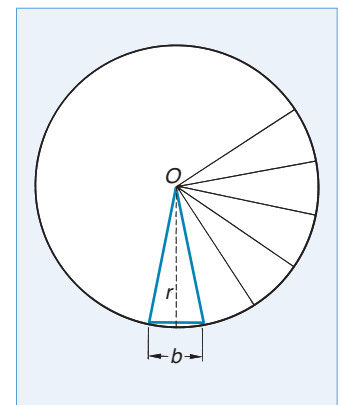
La relazione sopra scritta viene spesso impiegata inserendo in essa il diametro d del cerchio in sostituzione del raggio r . Poiché è $r = d/2$, ne segue:

$$I_O = \frac{\pi}{32} \cdot d^4 \quad (8)$$

e in forma approssimata ($\pi = 3,14 \cong 3,2$):

$$I_O = 0,1 \cdot d^4 \quad (9)$$

molto comoda per i calcoli numerici.



8 Momento d'inerzia polare di un cerchio.

MOMENTO D'INERZIA POLARE DEL CERCHIO RISPETTO AL CENTRO RICAIVATO CON IL CALCOLO DIFFERENZIALE

Il procedimento è rapidissimo se si ricorre al calcolo differenziale (FIGURA 9). Considerando una corona circolare di spessore infinitesimo dy , distante y dal centro O del cerchio, la sua area è $da = 2\pi \cdot y \cdot dy$, e il momento d'inerzia polare risulta:

$$I_O = \int_0^r y^2 \cdot da = \int_0^r 2\pi \cdot y \cdot y^2 \cdot dy = \int_0^r 2\pi \cdot y^3 \cdot dy$$

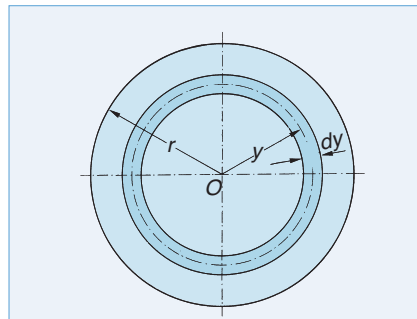
Integrando si ha:

$$I_O = \left[\frac{2\pi \cdot y^4}{4} \right]_0^r = \left[\frac{\pi \cdot y^4}{2} \right]_0^r$$

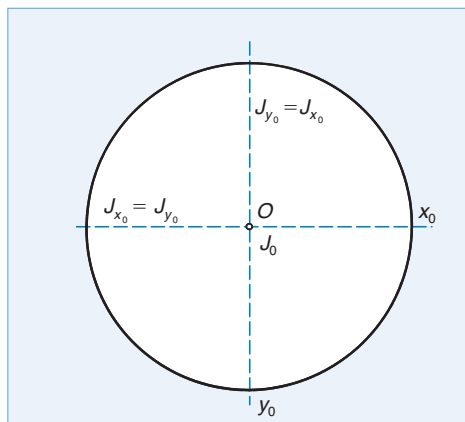
e poiché la variabile y assume i valori compresi fra zero e r :

$$I_O = \frac{\pi \cdot r^4}{2}$$

come ottenuto con il metodo elementare.



9 Momento d'inerzia polare di un cerchio ottenuto con procedimento di integrazione



10 Momenti d'inerzia assiali di un cerchio.

► **Momento d'inerzia assiale rispetto a un diametro** Tracciati due diametri x_0 e y_0 perpendicolari fra loro (FIGURA 10), i momenti d'inerzia rispetto a tali diametri sono evidentemente uguali per la configurazione stessa del cerchio:

$$I_{x_0} = I_{y_0}$$

per cui possiamo scrivere:

$$I_O = I_{x_0} + I_{y_0} = 2 \cdot I_{x_0} = 2 \cdot I_{y_0}$$

e ricavare i momenti d'inerzia assiali:

$$I_{x_0} = I_{y_0} = \frac{I_O}{2}$$

che risultano espressi da:

$$I_{x_0} = I_{y_0} = \frac{\pi}{64} \cdot d^4 \quad (10)$$

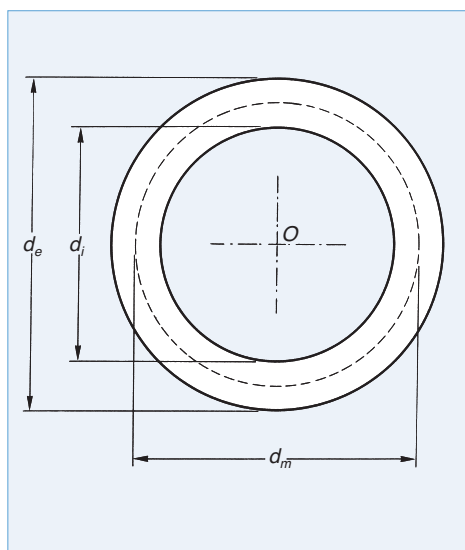
ovvero da:

$$I_{x_0} = I_{y_0} = \frac{\pi}{4} \cdot r^4 \quad (11)$$

se vengono espressi in funzione del raggio.

Corona circolare

Consideriamo una corona circolare FIGURA 11), caratterizzata dai due diametri d_e (esterno) e d_i (interno), della quale si vogliono determinare i momenti d'inerzia baricentrici. Tale figura può essere ottenuta da un cerchio, asportando la sua parte centrale, anch'essa di forma circolare. Data inoltre la coincidenza dei baricentri dei due cerchi (interno ed esterno), i momenti d'inerzia si possono ricavare mediante una comune sottrazione. Per il



11 Momenti d'inerzia di una corona circolare.

cerchio esterno è infatti:

$$I''_{x_0} = \frac{\pi}{64} \cdot d_e^4$$

e per quello interno:

$$I'_{x_0} = \frac{\pi}{64} \cdot d_i^4$$

Sottraendo risulta:

$$I_{x_0} = I''_{x_0} - I'_{x_0} = \frac{\pi}{64} \cdot d_e^4 - \frac{\pi}{64} \cdot d_i^4$$

da cui segue:

$$I_{x_0} = \frac{\pi}{64} \cdot (d_e^4 - d_i^4) \quad (12)$$

Il momento d'inerzia rispetto all'asse verticale I_y è identico a quello espresso dalla (11.24). Per quanto concerne il momento polare baricentrico, si opera in modo analogo, ottenendo:

$$I_O = \frac{\pi}{32} \cdot (d_e^4 - d_i^4) \quad (13)$$

Se la corona circolare è di piccolo spessore (cioè i due diametri sono poco diversi), il procedimento per la valutazione dei momenti d'inerzia risulta ulteriormente semplificato; in tale ipotesi è lecito infatti supporre che tutta l'area A della corona circolare sia concentrata lungo la circonferenza media di raggio

$$r_m = \frac{r_e + r_i}{2}$$

ottenendo:

$$I_O = A \cdot r_m^2 \quad (14)$$

in virtù della costanza di r_m in ogni punto della circonferenza media. Ricordando il primo teorema di Guldino (v. paragrafo 6 del capitolo 3) possiamo scrivere $A = 2\pi \cdot s \cdot r_m$ e la (14) diventa:

$$I_O = 2\pi \cdot s \cdot r_m^3 \quad (15)$$

oppure, espressa in funzione del diametro medio d_m :

$$I_O = \frac{1}{4} \pi \cdot s \cdot d_m^3 \quad (16)$$

I momenti d'inerzia assiali si ottengono, come di consueto, da quello polare ora calcolato:

$$I_{x_0} = I_{y_0} = \frac{I_O}{2} = \pi \cdot s \cdot r_m^3 \quad (17)$$

oppure:

$$I_{x_0} = I_{y_0} = \frac{I_O}{2} = \frac{1}{8} \pi \cdot s \cdot d_m^3 \quad (18)$$