Le forze nello spazio

I problemi di composizione e scomposizione di forze si complicano notevolmente quando si opera nello spazio, anziché nel piano, come abbiamo fatto finora. Tuttavia elenchiamo dapprima i casi più semplici, riservandoci di esporre successivamente un procedimento di carattere più generale.

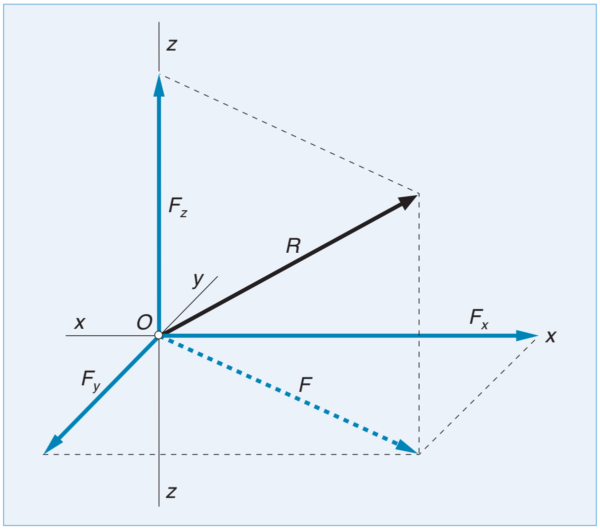
1 Scomposizione di una forza in tre direzioni ortogonali fra loro

Anche in questo caso, perché il problema sia determinato, la retta d'azione della forza data R deve passare per il punto in cui si incontrano le tre rette secondo le quali deve avvenire la scomposizione (FIGURA **1**). In pratica, le tre rette date costituiscono un sistema di assi cartesiani nello spazio (x, y, z) con l'origine nel punto di applicazione O di R.

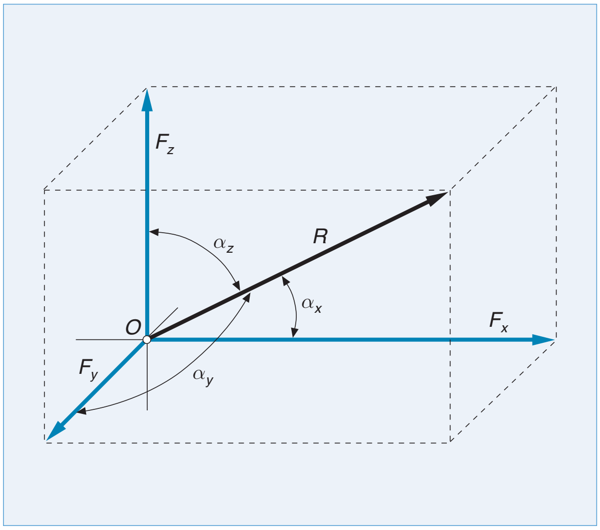
Scomponiamo dapprima R in due componenti, una delle quali agisca secondo un asse cartesiano e l'altra giaccia nel piano formato dagli altri due. Nella figura citata tale scomposizione è effettuata rispetto all'asse z e al piano xy, ottenendo le due componenti F_z e F.

Successivamente è possibile scomporre, nel piano xy, la forza F nelle sue componenti F_x e F_y rispetto ai due assi x e y.

Se completiamo la scomposizione con i segmenti mancanti (FIGURA **2**), è facile capire che R costituisce la diagonale di un parallelepipedo, anziché di un parallelogramma, come avveniva nel caso delle scomposizioni effettuate nel piano.



1 Scomposizione di una forza *R in* tre componenti ortogonali fra loro.



2 Calcolo analitico delle tre componenti della forza *R.*

Pidatella, Ferrari Aggradi, Pidatella, *Corso di meccanica, macchine ed energia* © Zanichelli 2012

Se indichiamo con α_x, α_y e α_z gli angoli formati dalla forza data con i tre assi cartesiani, il calcolo analitico delle tre componenti è immediato. Potremo infatti scrivere:

$$F_x = R \cdot \cos \alpha_x \qquad (1)'$$
$$F_y = R \cdot \cos \alpha_y \qquad (1)''$$
$$F_z = R \cdot \cos \alpha_z \qquad (1)'''$$

Il procedimento esposto è valido anche se il punto di applicazione di R non coincide con l'origine O degli assi cartesiani; la FIGURA **3** non richiede ulteriori spiegazioni. Ciò consente di definire le forze F_x, F_y e F_z come le **proiezioni** di una forza data sugli assi del sistema cartesiano.

Anche il procedimento inverso non pone eccessive difficoltà. Date tre forze F_x, F_y e F_z, agenti secondo tre rette d'azione ortogonali fra loro, la risultante R del sistema si ottiene costruendo il parallelepipedo avente come spigoli le tre forze date (FIGURA **4**); l'intensità della risultante si calcola con la relazione:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} \qquad (2)$$

e i relativi angoli formati dalla sua retta d'azione con gli assi cartesiani si ricavano dalle rispettive funzioni trigonometriche:

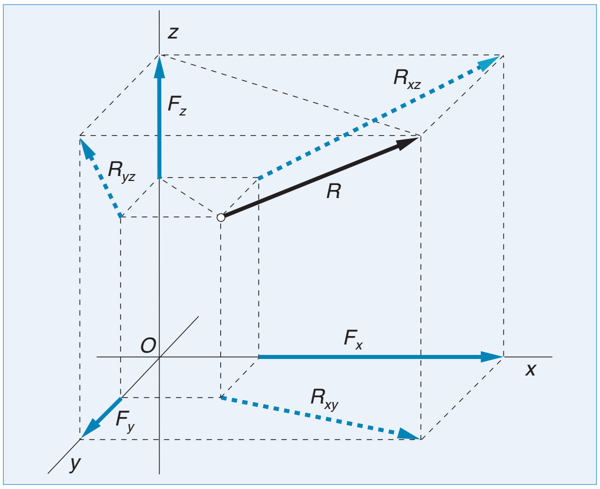
$$\cos\alpha_x = \frac{F_x}{R} \qquad (3)'$$

$$\cos\alpha_y = \frac{F_y}{R} \qquad (3)''$$

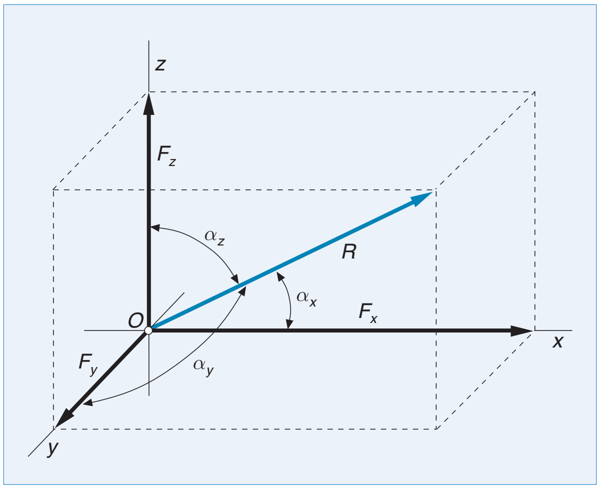
$$\cos\alpha_z = \frac{F_z}{R} \qquad (3)'''$$

2 Composizione di più forze non complanari concorrenti in un punto

Escludendo il caso in cui le tre rette d'azione delle forze date siano ortogonali fra loro, il sistema può essere assimilato a quello di FIGURA **5**. Il procedimento di composizione è possibile in quanto le forze date sono complanari a due a due. Scelte pertanto due forze del sistema (F_a e F_b), esse possono essere composte con la consueta regola del parallelogramma, ottenendo una risultante parziale R_1 che,

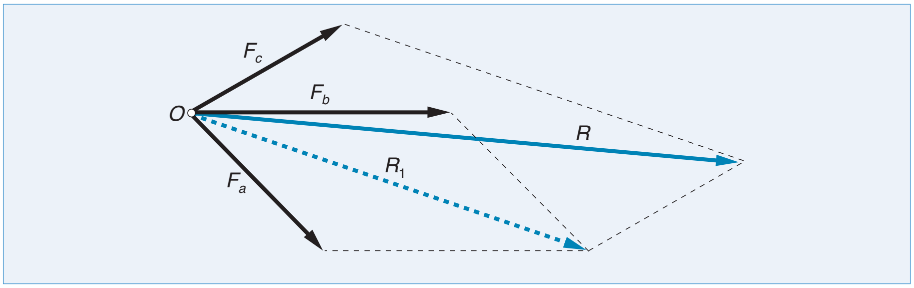


3 Proiezione di una forza R su tre assi ortogonali.



4 Risultante di tre forze ortogonali nello spazio.

Pidatella, Ferrari Aggradi, Pidatella, *Corso di meccanica, macchine ed energia* © Zanichelli 2012



5 Composizione di tre forze comunque orientate nello spazio.

per l'ipotesi fatta in precedenza, è complanare con la terza forza F_c. Componendo R_1 con F_c, si determina la risultante totale R del sistema.

3 Composizione di più forze parallele non complanari

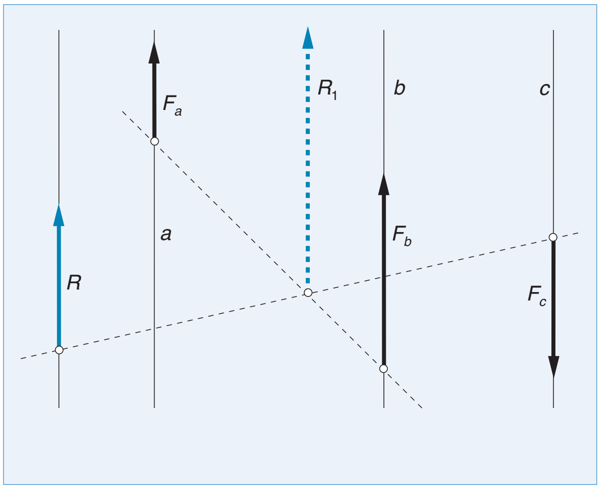
Il procedimento non si discosta eccessivamente da quello esposto nel paragrafo 6.2 del testo, in quanto due forze qualsiasi di quelle componenti il sistema giacciono in uno stesso piano (FIGURA **6**). Ciò premesso, si determina la risultante di due forze scelte ad arbitrio, ottenendo una risultante parziale R_1, evidentemente complanare con la terza forza F_c; la risultante totale R si ottiene componendo R_1 con F_c.

4 Teorema delle proiezioni

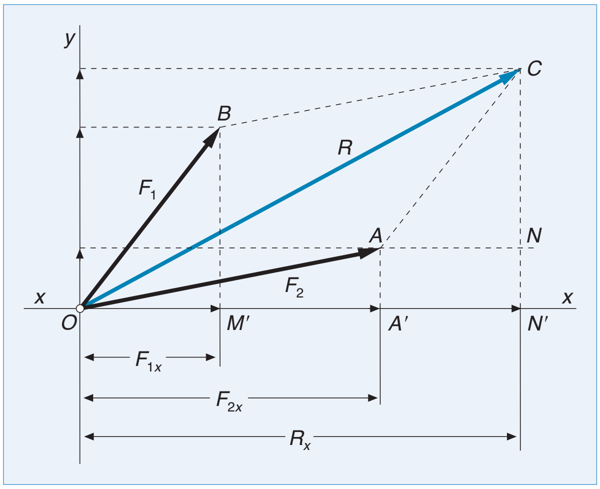
Nel caso di due forze sghembe, o nell'ipotesi più generale di un sistema di forze nello spazio, disposte in modo da non rientrare in nessuno dei casi precedentemente esposti, si può ottenere la risultante ricorrendo al **teorema delle proiezioni**.

> ▶ Scomposte le forze del sistema nelle singole componenti agenti secondo tre assi cartesiani x, y, z, la somma delle componenti delle forze lungo uno degli assi eguaglia la componente della risultante orientata sull'asse stesso.

Determinate le tre componenti della risultante (R_x, R_y, R_z) e trasportate le stesse nell'origine degli assi, con la (2) si calcola l'intensità del vettore R, equipollente alla risultante del sistema di forze. La dimostrazione del teorema suddetto è semplice, specialmente se limitata a un sistema cartesiano piano; l'estensione a un sistema



6 Composizione di tre forze parallele non complanari.



7 Teorema delle proiezioni.

Pidatella, Ferrari Aggradi, Pidatella, *Corso di meccanica, macchine ed energia* © Zanichelli 2012

nello spazio è immediata e non richiede ulteriori spiegazioni.

Siano F_1 e F_2 le forze date, che supporremo, per semplicità, applicate nell'origine O del sistema cartesiano (FIGURA 7), e sia R la loro risultante, costruita mediante la consueta regola del parallelogramma. Eseguite le proiezioni, si rileva sull'asse delle ascisse quanto segue:

- proiezione di R (R_x) $= \overline{ON'}$
- proiezione di F_1 (F_{1x}) $= \overline{OM'}$
- proiezione di F_2 (F_{2x}) $= \overline{OA'}$

Per l'eguaglianza dei due triangoli OBM' e ACN risulta $\overline{OM'} = \overline{AN} = \overline{A'N'}$ da cui segue:

$$R_x = OM' + OA' = A'N' + OA' = ON'$$

In modo del tutto analogo si dimostra la validità del teorema per le componenti agenti secondo l'asse y.

Per individuare la risultante di un generico sistema di forze distribuite nello spazio, si assume una terna di assi cartesiani e si eseguono le varie proiezioni sull'asse delle x (F_{1x}, F_{2x}, ..., F_{nx}), sull'asse y (F_{1y}, F_{2y}, ..., F_{ny}) e sull'asse z (F_{1z}, F_{2z}, ..., F_{nz}). Si calcolano poi le risultanti parziali:

$$F_{1x} + F_{2x} + ... + F_{nx} = R_x \tag{4)'$$

$$F_{1y} + F_{2y} + ... + F_{ny} = R_y \tag{4)''$$

$$F_{1z} + F_{2z} + ... + F_{nz} = R_z \tag{4)'''$$

che, trasportate nell'origine degli assi, permettono di determinare l'intensità della risultante R del sistema:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} \tag{5}$$

Si tenga comunque presente che le sommatorie (4) devono essere intese come somme algebriche, cioè eseguite tenendo conto dei versi delle singole componenti.

Pidatella, Ferrari Aggradi, Pidatella, *Corso di meccanica, macchine ed energia* © Zanichelli 2012