

Integrazione e derivazione grafica

1 Integrazione grafica

Lo studio del moto armonico ci fornisce l'occasione per una prima applicazione dei processi di derivazione e di integrazione (accennati nel capitolo 6) non ancora in forma analitica, ma semplicemente basata su procedimenti grafici di facile esecuzione.

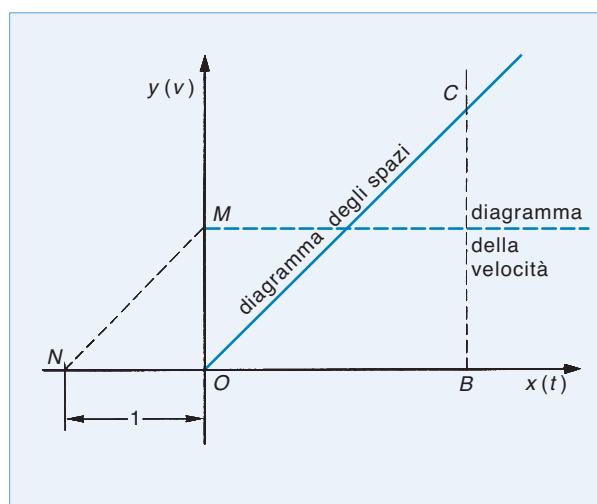
A titolo di esempio, eseguiamo il procedimento di integrazione grafica riferendoci al **moto rettilineo uniforme**, i cui diagrammi, estremamente semplici, sono già stati illustrati nel paragrafo 2 del capitolo 6. Con tale procedimento siamo in grado di costruire il diagramma dello spazio in funzione del tempo trascorso, disponendo del diagramma della velocità, anch'essa in funzione del tempo.

Poiché nel moto uniforme la velocità è costante, il suo diagramma in funzione del tempo è rappresentato da una retta parallela all'asse delle ascisse (FIGURA 1). Su tale asse, dalla parte opposta rispetto all'origine O , riportiamo un segmento \overline{ON} uguale all'unità di tempo, secondo la scala prescelta per il disegno, e uniamo il punto N con M individuando la direzione NM inclinata di un angolo α rispetto all'asse delle ascisse. Tracciando dall'origine O degli assi la parallela al segmento \overline{NM} , tale semiretta rappresenta il diagramma dello spazio in funzione del tempo, cioè la curva *integrale* di quella che costituisce il diagramma della velocità.

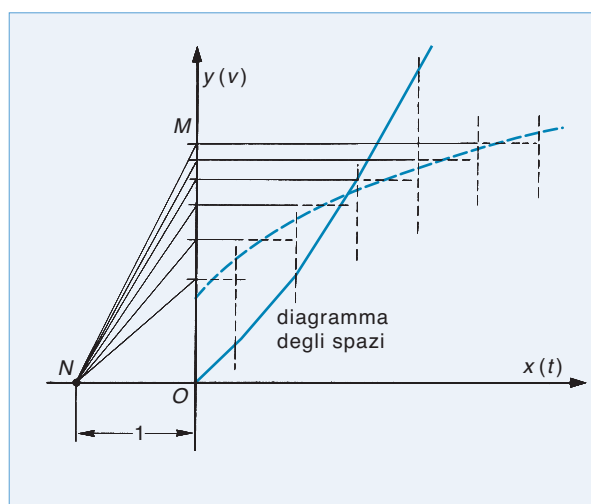
La dimostrazione analitica di tale asserzione è rapidissima: scelto ad arbitrio un punto C sul diagramma ottenuto, e abbassata da tale punto la normale all'asse delle ascisse (in B), si determina il triangolo OCB , evidentemente simile a NMO . Si può scrivere pertanto:

e ricavare:

$$\frac{\overline{CB}}{\overline{NO}} = \frac{\overline{MO} \cdot \overline{OB}}{\overline{NO}^2}$$

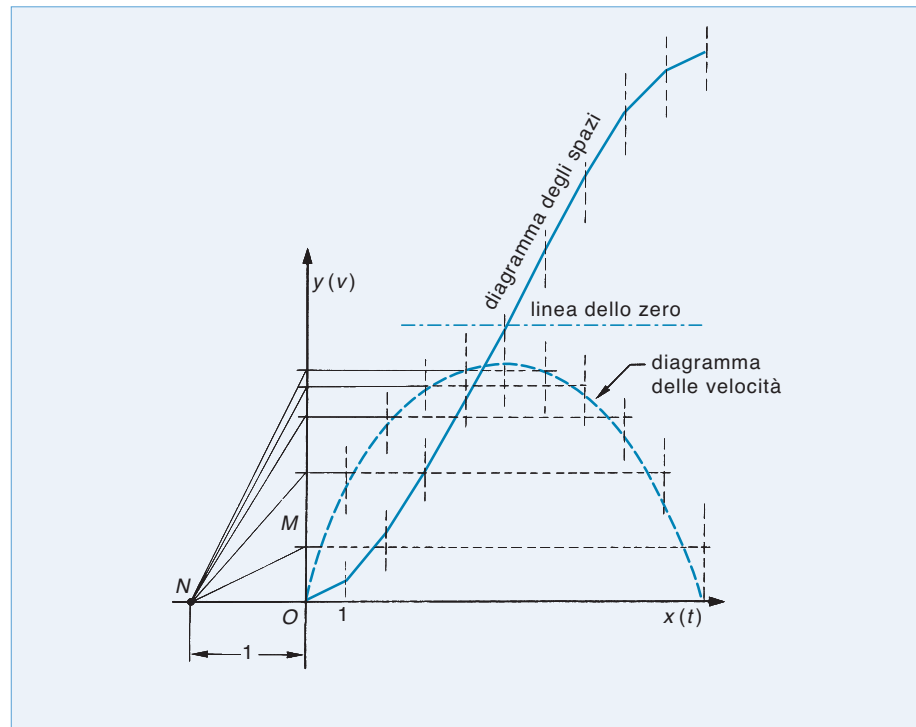


1 Integrazione grafica: moto uniforme.



2 Integrazione grafica: moto vario.

3 Integrazione grafica: moto armonico.

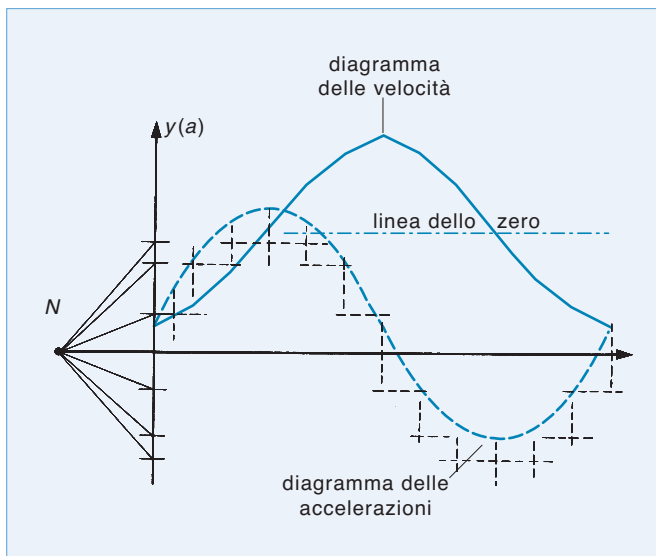


nella quale si ha:

$$\overline{NO} = 1 \quad \overline{MO} = v \quad \overline{OB} = t \quad \text{per cui} \quad \overline{CB} = v \cdot t = s$$

Ogni ordinata della linea ottenuta con l'integrazione grafica rappresenta lo spazio percorso nel tempo t ; in altre parole, la linea rappresenta il diagramma dello spazio in funzione del tempo.

Se il diagramma della velocità è una linea curva, il procedimento ora descritto si complica leggermente: occorre suddividere la curva data in tanti piccoli tratti (FIGURA 2), ciascuno dei quali verrà sostituito da un segmento orizzontale (linea di compenso), in modo da realizzare tanti rettangoli la cui area sia uguale a quella dei trapezi ottenuti con la suddivisione della curva.



4 Integrazione grafica: moto armonico.

Quindi il diagramma originario, generalmente curvilineo, si trasforma in una spezzata a gradini, ognuno dei quali, prolungato, intercetta sull'asse delle ordinate un segmento \overline{MO} sul quale si opera nel modo descritto in precedenza.

Applichiamo ora il procedimento di integrazione grafica al caso di un **moto armonico**, dove il diagramma della velocità ha l'andamento sinusoidale espresso dalla (7.11) del testo, proponendoci di ricavare il diagramma dello spazio percorso dal punto mobile P' .

Nota il diagramma di v in funzione del tempo t , dividiamo la curva in tanti piccoli archi uguali (FIGURA 3) e tracciamo i segmenti di compenso. Prolunghiamo il primo di tali segmenti fino a incontrare in M l'asse delle ordinate e congiungiamo il punto M con l'estremo N del segmento \overline{ON} , assunto pari all'unità di tempo, dal lato opposto rispetto all'asse verticale.

Successivamente, dall'origine O tracciamo la parallela a NM interrompendola nel punto in cui incontra la verticale innalzata dal punto 1. Operiamo allo stesso modo su tutti gli altri segmenti di compenso fino a ottenere una spezzata (in colore nella figura), inscritta nella curva che rappresenta il diagramma cercato.

Poiché la velocità è definita come l'integrale dell'accelerazione, il suo diagramma può essere ottenuto con lo stesso procedimento, ricavandolo da quello dell'accelerazione espressa in funzione del tempo dalla (7.16) del testo. La FIGURA 4 illustra i due diagrammi e non richiede ulteriori spiegazioni in quanto il procedimento seguito non si discosta minimamente da quello sopra descritto.

2 Derivazione grafica

Il procedimento di derivazione grafica è sostanzialmente identico a quello dell'integrazione, anche se, evidentemente, eseguito con modalità inverse rispetto al precedente.

Facendo riferimento al **moto armonico**, proponiamoci di tracciare il diagramma dell'accelerazione (che è la derivata della velocità rispetto al tempo) ricavandolo da quello, ormai noto, della velocità.

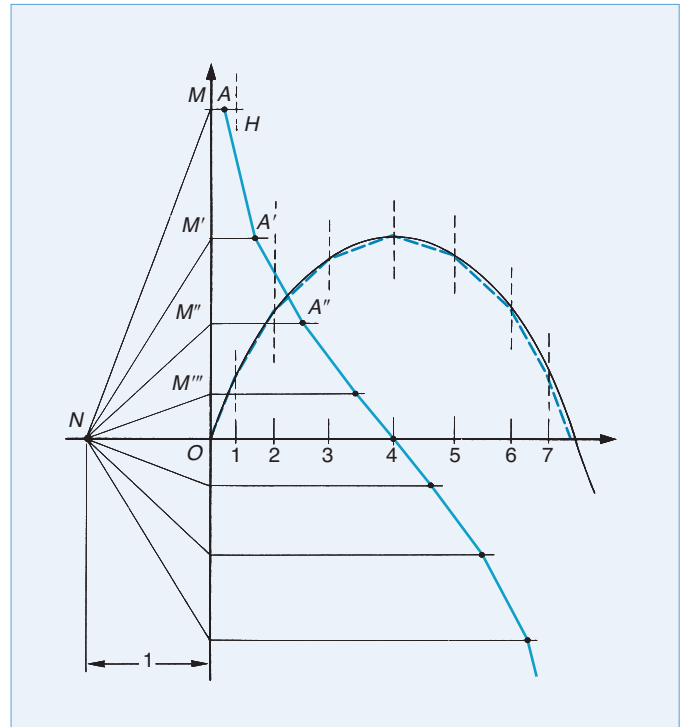
Nella FIGURA 5 il diagramma $v-t$ è tracciato in nero; dividiamolo in tanti archi uguali e, collegando gli estremi di tali archi, ricaviamo una spezzata inscritta nel diagramma, i cui lati hanno, in genere, inclinazione diversa rispetto all'asse delle ascisse.

Dalla parte opposta rispetto all'asse delle ordinate segniamo il punto N , estremo del segmento \overline{ON} , la cui lunghezza, nella scala del disegno, equivale all'unità di tempo. Successivamente, dal punto N , tracciamo un fascio di raggi paralleli ai singoli tratti che costituiscono la spezzata, intercettando l'asse delle ordinate nei punti M, M', M'' ecc.

Dal primo di questi punti (M) procediamo in senso orizzontale fino a incontrare in H la verticale innalzata dal punto 1, cioè il lato estremo della prima striscia. Il segmento $\overline{H1}$ (equivalente peraltro a \overline{OM}) misura l'ordinata media della prima striscia, per cui, ricordando il procedimento di integrazione, è evidente che la linea derivata da quella nota deve passare per il punto di mezzo del tratto orizzontale MH .

Segnato con A tale punto e ripetuto il procedimento nei riguardi delle strisce successive, si determina una serie di punti (A', A'', A''' ecc.) che, uniti insieme, individuano una spezzata, simile, nel suo andamento, alla curva cercata.

I procedimenti di integrazione e di derivazione grafica trovano ampio campo di applicazione nello studio cinematico dei manovellismi e in alcuni problemi di geometria descrittiva.



5 Derivazione grafica: moto armonico.