Moto dei proiettili

Esaminiamo ora l'ipotesi che la traiettoria del moto rettilineo uniforme, anziché orizzontale, sia inclinata di un generico angolo α rispetto al piano di riferimento.

Chiaramente, non variando sostanzialmente le caratteristiche dei due moti componenti, la traiettoria descritta dal punto materiale P risulterà ancora parabolica, anche se la legge del moto sarà più complessa.

Facendo riferimento alla FIGURA **1** impostiamo un ragionamento analogo a quello esposto nel testo.

Dopo un tempo generico t, se il grave fosse animato dal solo moto uniforme nella direzione individuata dall'angolo α, dovrebbe trovarsi nel punto A, le cui coordinate x e y' rispetto a un sistema cartesiano di riferimento con l'origine O nel punto di partenza, sono:

$$x = v \cdot t \cdot \cos\alpha \qquad (1)'$$

$$y' = v \cdot t \cdot \operatorname{sen}\alpha \qquad (1)''$$

Per effetto dell'attrazione terrestre, il corpo si troverà invece in C, avendo perduto la quota $\overline{AC}$ espressa da:

$$\overline{AC} = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$$

Le coordinate del punto C sono:

$$x = v \cdot t \cdot \cos\alpha \qquad (2)'$$

$$y = v \cdot t \cdot \operatorname{sen}\alpha - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \qquad (2)''$$

Dividendo la $(2)''$ per la $(2)'$ risulta:

$$\frac{y}{x} = \frac{v \cdot t \cdot \operatorname{sen}\alpha - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2}{v \cdot t \cdot \cos\alpha} = \frac{v \cdot t \cdot \operatorname{sen}\alpha}{v \cdot t \cdot \cos\alpha} - \frac{\frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2}{v \cdot t \cdot \cos\alpha}$$

e semplificando:

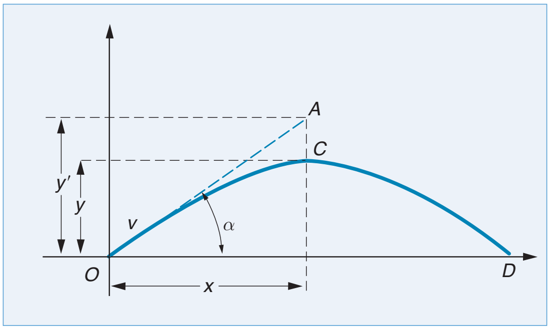
$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg}\alpha - \frac{g \cdot t}{2 \cdot v \cdot \cos\alpha}$$

Ricavando il tempo t dalla $(1)'$:

$$t = \frac{x}{v \cdot \cos\alpha}$$

e, sostituendo, si ottiene:

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg}\alpha - \frac{g \cdot x}{2 \cdot v \cdot \cos\alpha \cdot v \cdot \cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha - \frac{g \cdot x}{2 \cdot v^2 \cdot \cos^2\alpha}$$



1 Moto dei proiettili.

Esprimendo infine l'ordinata y in funzione dell'ascissa x:

$$y = -\frac{g \cdot x^2}{2 \cdot v^2 \cdot \cos^2\alpha} + \operatorname{tg}\alpha \cdot x \qquad (3)$$

si perviene a una relazione del tipo $y = -k \cdot x^2 + k_1 \cdot x$ che rappresenta una parabola ad asse verticale con la concavità rivolta verso il basso (coefficiente di x^2 negativo) e passante per l'origine degli assi.

Il corpo perciò si innalza inizialmente con traiettoria inclinata dell'angolo α sull'orizzontale, ma perde gradualmente quota per effetto dell'accelerazione di gravità. Raggiunge un'altezza massima h oltre la quale imbocca la parabola discendente, che (se trascuriamo la resistenza dell'aria) è simmetrica rispetto a quella descritta nel tratto ascendente, fino a toccare il suolo in un punto D.

Il caso trattato rispecchia – pur se limitato alla semplice teoria – il problema balistico del moto dei proiettili a lunga gittata.

È chiaro però che i risultati che otterremo nel seguito della nostra discussione saranno sensibilmente in eccesso rispetto a quelli che si verificano nella realtà, ove la resistenza dell'aria assume un ruolo tanto più importante quanto maggiore è la velocità del proiettile.

La distanza orizzontale fra l'origine O degli assi e il punto di caduta D viene comunemente definita **gittata**. Il suo valore si determina ponendo $y = 0$ nell'equazione (3), in quanto il grave tocca il suolo in D e quindi l'ordinata ha nuovamente valore nullo. Si ottiene:

$$\frac{g \cdot x^2}{2 \cdot v^2 \cdot \cos^2\alpha} = \operatorname{tg}\alpha \cdot x$$

equazione di secondo grado che fornisce due soluzioni. Una soluzione è $x = 0$ e rispecchia le condizioni iniziali prima del lancio, mentre l'altra si ottiene da:

$$g \cdot x = 2 \cdot v^2 \cdot \cos^2\alpha \cdot \operatorname{tg}\alpha$$

Semplificando risulta:

$$g \cdot x = 2 \cdot v^2 \cdot \operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\alpha = v^2 \cdot \operatorname{sen} 2\alpha$$

da cui segue:

$$\boxed{x = \frac{v^2 \cdot \operatorname{sen} 2\alpha}{g}} \qquad (4)$$

Il valore della gittata (x) dipende, oltre che dalla velocità iniziale v, anche dall'angolo di inclinazione α e assume il valore massimo (per v costante) quando:

$$\operatorname{sen} 2\alpha = 1 \qquad \text{cioè} \qquad \alpha = 45°$$

In tale ipotesi il valore massimo della gittata x vale:

$$\boxed{x_{max} = \frac{v^2}{g}} \qquad (5)$$

Per qualsiasi altro valore di α la gittata, a parità di v, sarà inferiore a questo valore massimo.

Per quanto riguarda la quota più alta raggiunta dal corpo, questa si ottiene ponendo nella (3):

$$x = \frac{v^2 \cdot \operatorname{sen} 2\alpha}{2 \cdot g}$$

cioè un'ascissa pari alla metà della gittata. La (3) diventa allora:

$$y_0 = -\frac{g}{2 \cdot v^2 \cdot \cos^2\alpha}\left(\frac{v^2 \cdot \operatorname{sen} 2\alpha}{2 \cdot g}\right)^2 + \operatorname{tg}\alpha \cdot \frac{v^2 \cdot \operatorname{sen} 2\alpha}{2 \cdot g}$$

e sviluppando i calcoli:

$$y_0 = -\frac{v^4 \cdot (2 \cdot \mathrm{sen}\,\alpha \cdot \cos\,\alpha)^2}{8 \cdot g \cdot v^2 \cdot \cos^2\alpha} + \mathrm{tg}\,\alpha \cdot \frac{v^2 \cdot 2 \cdot \mathrm{sen}\,\alpha \cdot \cos\,\alpha}{2 \cdot g} =$$

$$= -\frac{4 \cdot v^2 \cdot \mathrm{sen}^2\alpha \cdot \cos^2\alpha}{8 \cdot g \cdot \cos^2\alpha} + \frac{v^2 \cdot \mathrm{sen}^2\alpha}{g} = -\frac{v^2 \cdot \mathrm{sen}^2\alpha}{2 \cdot g} + \frac{v^2 \cdot \mathrm{ser}}{g}$$

Semplificando si perviene infine all'espressione finale:

$$y_0 = \frac{v^2 \cdot \mathrm{sen}^2\alpha}{2 \cdot g}$$

che per $\alpha = 45°$, diventa:

$$\boxed{y_0 = \frac{v^2}{4 \cdot g}} \qquad (6)$$

Terminiamo con alcuni esercizi riguardanti il moto dei proiettili.

1 ESERCIZIO SVOLTO

Argomento *Moto dei proiettili*

Un proiettile viene sparato da un cannone il cui asse è inclinato di 30° sull'orizzontale. Supponendo che la velocità iniziale del proiettile sia di 200 m/s e che si possano trascurare le resistenze passive, determinare il punto di caduta e la quota massima raggiunta.

▶ Per la determinazione del punto di caduta *D* basta applicare la (4), ponendo in essa $2 \cdot \alpha = 60°$. Essendo sen 60° ≅ 0,866, risulta:

$$x = \frac{200^2 \cdot 0{,}866}{9{,}81} \cong 3531\,\mathrm{m}$$

L'altezza massima raggiunta dal proiettile è

$$y_0 = \frac{v^2 \cdot \mathrm{sen}^2\alpha}{2 \cdot g} = \frac{200^2 \cdot 0{,}5^2}{2 \cdot 9{,}81} \cong 510\,\mathrm{m}$$

ESERCIZI PROPOSTI

1.a ▲△△ Risolvere l'esercizio precedente, supponendo che il cannone sia inclinato di 60° sull'orizzontale, fermi restando gli altri dati del problema.

Soluzione: $x \cong 3531$ m; $y_0 \cong 1529$ m.

1.b ▲△△ Un proiettile, la cui velocità iniziale è di 240 m/s, cade a 4 km dal punto di partenza. Con quale inclinazione ha iniziato la traiettoria?

Soluzione: $\alpha \cong 21°\,28'$.

1.c ▲▲△ Quale inclinazione α deve avere il cannone dell'esercizio 1, affinché l'altezza massima y_0 raggiunta dal proiettile uguagli il valore della gittata x? Calcolare il valore della gittata in tali condizioni.

Soluzione: $\alpha \cong 76°$; $x = y_0 \cong 1919$ m.