# Capitolo 20

L'idrodinamica studia il moto dei liquidi e le grandezze fondamentali che la caratterizzano sono **pressione** (vedi cap. 19), **portata** e **velocità**:

- se in un corso d'acqua (o in una tubazione) si immagina di tracciare una sezione normale all'asse della corrente, si definisce **portata volumetrica** $q_V$ (o più semplicemente portata) il volume di liquido che attraversa la sezione nell'unità di tempo e si esprime in $m^3/s$;
- si parla di *portata in massa* (o **portata massica** $q_m$) la massa di fluido che attraversa una determinata sezione nell'unità di tempo ed è espressa in kg/s. Nel moto dei liquidi è indifferente riferirsi alla portata volumetrica o a quella massica, nel moto degli aeriformi è necessario invece riferirsi sempre alla portata massica;
- la **velocità** è lo spazio percorso nell'unità di tempo e si esprime in m/s. Nello studio del moto dei fluidi reali, faremo riferimento alla **velocità media** del fluido in una sezione prefissata.

Il moto del liquido attraverso una sezione viene definito **a regime permanente** quando le grandezze fondamentali rimangono costanti nel tempo (es. il moto dei liquidi entro condotte o tubazioni) altrimenti si parla di moto del liquido **a regime variabile** (es. nei corsi d'acqua naturali, soggetti a oscillazioni di regime in corrispondenza delle stagioni, e della maggiore o minore entità delle precipitazioni).

Calcoliamo la portata fluente entro una condotta di forma generica e sezione $A$ in un tempo brevissimo $t$: il volume di fluido che l'attraversa è $V = A \cdot v \cdot t$ dove $v \cdot t$ è lo spazio percorso dal liquido nel tempo $t$.

La portata $q_V$, intesa come rapporto fra il volume effluente e il tempo impiegato nell'efflusso, è:

$$q_V = \frac{V}{t} = \frac{A \cdot v \cdot t}{t} = A \cdot v \qquad (20.1)$$

Applicando la (20.1) per una condotta generica entro la quale scorre un liquido in regime permanente ($q_V$ = cost) in due sezioni normali all'asse della condotta stessa otteniamo l'equazione di continuità:

$$A_1 \cdot v_1 = A_2 \cdot v_2 \qquad (20.2)$$

che può anche essere scritta nella forma:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{v_2}{v_1} \qquad (20.3)$$

In regime permanente, la velocità del liquido scorrente varia in **proporzione inversa** rispetto all'area della sezione attraversata.

Considerando la (20.3) nel caso di canali artificiali o di condotte ($A_1 = A_2$) si ha: $v_1 = v_2$. Quindi, un caso particolare del regime permanente è il **regime uniforme**, caratterizzato dalla costanza della velocità media del liquido in qualsiasi sezione.

Consideriamo una condotta di forma generica in cui scorre un liquido ideale (viscosità nulla) in regime permanente fra due sezioni e supponiamo che il liquido in moto non riceva energia dall'esterno e nemmeno la ceda. **Il principio di conservazione dell'energia afferma che l'energia totale posseduta dal liquido nell'attraversamento della prima sezione, è uguale a quella che esso possiede nell'attraversamento della seconda sezione**; il liquido ideale non risente di alcuna forma di attrito.

L'energia totale posseduta dal liquido è la somma di:

- **energia potenziale dovuta alla sua posizione**:

$$E_p' = m \cdot g \cdot z$$

dove con $z$ indichiamo la quota del baricentro della sezione rispetto a un generico piano di riferimento (altezza geodetica);

- **energia potenziale dovuta alla pressione** cui il liquido è sottoposto in funzione della sua altezza piezometrica:

$$E_p'' = m \cdot g \cdot \frac{p}{g \cdot \rho} = m \cdot \frac{p}{\rho}$$

- **energia cinetica**:

$$E_c = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$$

Per il principio della conservazione dell'energia:

$$\left( m \cdot g \cdot z + \frac{p_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} \right) = m \cdot \left( g \cdot z_2 + \frac{p_2}{\rho} + \frac{v_2^2}{2} \right)$$

che costituisce l'espressione analitica del **teorema di Bernoulli**. Se facciamo riferimento all'unità di peso del fluido (1 N):

$$z + \frac{p}{\rho \cdot g} + \frac{v^2}{2 \cdot g} = \text{cost} \qquad (20.7)$$

dove il primo termine ($z$) è detto altezza di posizione o **quota geodetica**, il secondo termine rappresenta l'altezza di una colonna di fluido che, a causa del suo peso, genera la pressione $p$ (**altezza piezometrica**), il terzo termine rappresenta l'altezza da cui il fluido dovrebbe cadere per acquistare la velocità $v$ (**altezza dinamica o cinetica**).

Vediamo l'equazione di Bernoulli in condizioni particolari:

• **l'asse del condotto è disposto orizzontalmente** ($z_1 = z_2$):

$$\frac{p}{\rho \cdot g} + \frac{v^2}{2 \cdot g} = \text{cost} \qquad (20.8)$$

**La pressione aumenta con la diminuzione del quadrato della velocità**: se la sezione del tubo si riduce, ivi si verifica un aumento della velocità della corrente fluida e contemporaneamente una diminuzione della pressione;

• il liquido scorre in regime uniforme ($v_1 = v_2$):

$$z + \frac{p}{\rho \cdot g} = \text{cost} \qquad (20.9)$$

la pressione cioè aumenta con il diminuire della quota geodetica;

• **la condotta generica è sostituita da un corso d'acqua** ($p_1 = p_2$):

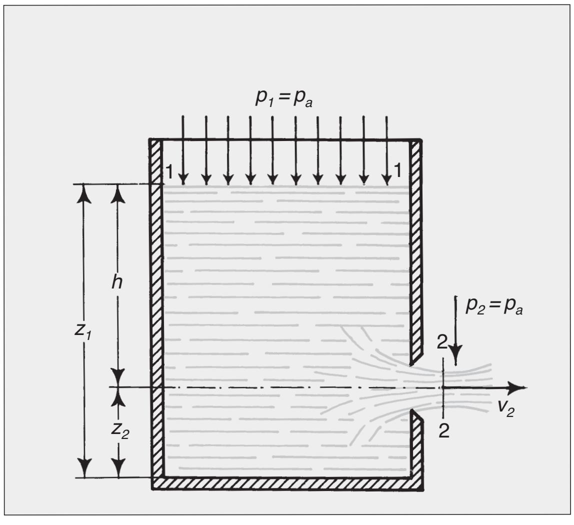
$$z + \frac{v^2}{2 \cdot g} = \text{cost} \qquad (20.10)$$

cioè la velocità aumenta al diminuire della quota geodetica.

Supponiamo che il recipiente schematizzato in figura abbia un volume grandissimo in modo che il livello del liquido non muti sostanzialmente per effetto dell'efflusso attraverso il foro praticato nella parete (ciò per affermare che il moto è permanente).

Applichiamo l'equazione di Bernoulli, scegliendo la sezione 1) in corrispondenza del pelo libero e la sezione 2) normale alla vena effluente appena fuori dal foro di efflusso. Le pressioni $p_1$ e $p_2$ si possono così ritenere uguali alla pressione atmosferica e data la notevole estensione della superficie, il pelo libero può essere considerato in quiete, pertanto:

$$p_1 = p_2 = p_a \text{ e } v_1 = 0:$$




$$z_1 = z_2 + \frac{v_2^2}{2 \cdot g}$$

Ponendo $z_1 - z_2 = h$, si ricava la velocità del liquido:

$$v_2 = \sqrt{2 \cdot g \cdot h} \qquad (20.11)$$

nota come **formula di Torricelli**; nella pratica in prossimità delle pareti, le falde liquide subiscono un rallentamento dovuto alle resistenze di attrito, per cui il valore effettivo della velocità di efflusso risulta inferiore a quello calcolato con la (20.11).

Se in una condotta scorre un liquido ideale, la velocità dei vari filetti fluidi ha lo stesso valore in ogni punto di una sezione normale all'asse. Se effluisce un liquido reale i filetti fluidi che scorrono lungo le pareti sono soggetti a una forza resistente (*attrito esterno*) che ne rallenta il moto; a loro volta essi esercitano una azione frenante nei riguardi degli altri filetti fluidi con i quali sono a contatto (*attrito interno*). La velocità di un fluido reale non è costante in tutti i punti di una sezione normale all'asse della tubazione, ma è **massima al centro** e decresce avvicinandosi alle pareti fino a poterla ritenere **nulla** per uno strato infinitamente sottile prossimo **alle pareti stesse**. L'intensità delle resistenze di attrito che si oppongono al moto delle particelle di liquido dipende dalla natura del fluido e dalla sua temperatura: l'olio, per esempio, fluisce in un tubo più lentamente dell'acqua, ma il suo movimento è agevolato aumentandone la temperatura.

La **viscosità** (detta anche a*ttrito interno*) di un fluido **è quella qualità che caratterizza con il proprio valore la maggiore o minore facilità di scorrimento del fluido stesso**. Esiste una **viscosità dinamica** $\mu$ del fluido in esame e una **viscosità cinematica** $\upsilon$, pari al rapporto tra la viscosità dinamica e la densità del fluido:

$$\upsilon = \frac{\mu}{\rho} \qquad (20.12)$$

Se il liquido è poco viscoso (per es. acqua) e fluisce in una tubazione di piccolo diametro con velocità dell'ordine di qualche cm/s, i filetti fluidi seguono traiettorie parallele all'asse longitudinale della condotta, e il moto viene definito **laminare**.

Aumentando gradualmente la velocità di scorrimento del liquido, le traiettorie descritte dai filetti fluidi divengono irregolari, si intersecano, si accavallano, dando luogo a un regime di moto detto **turbolento.** Ripetendo l'esperienza con un liquido più viscoso, si riscontra che il passaggio da un regime all'altro, avviene in corrispondenza di un valore della velocità lievemente superiore; in modo analogo, si rileva che anche il diametro del tubo entro cui scorre il fluido ha influenza sulla presenza di uno dei due regimi suddetti. Queste considerazioni furono conglobate da Reynolds nella definizione di una grandezza caratteristica (detta **numero di Reynolds**) il cui valore numerico permette di stabilire se il liquido assumerà uno o l'altro dei due regimi di moto. Il numero di Reynolds Re ha l'espressione:

$$Re = \frac{\rho \cdot v \cdot d}{\mu} \qquad (20.13)$$

in cui: $\rho$ è la densità del fluido, $v$ è la velocità media del fluido, $d$ è il diametro interno della tubazione e $\mu$ è la viscosità dinamica del fluido.

Talvolta il numero di Reynolds viene espresso tramite la viscosità cinematica  con la relazione:

$$Re = \frac{v \cdot d}{\upsilon} \qquad (20.14)$$

Il numero di Reynolds non ha dimensioni; per ogni liquido esiste un valore numerico del numero di Reynolds al disotto del quale il regime è sicuramente laminare e un secondo valore al disopra del quale il regime è sicuramente turbolento. Nell'intervallo fra i due valori suddetti, il moto del liquido è instabile.