Dimostrazione della 11.15

La dimostrazione della (11.15) è estremamente laboriosa; la riportiamo per puro scrupolo didattico pur non ritenendola indispensabile per la trattazione dell'argomento. Riferiamoci perciò allo schema di FIGURA **1**, in cui supponiamo, per semplicità, che la ruota di minori dimensioni sia quella conduttrice. La condizione necessaria, affinché non si verifichi l'interferenza fra i profili, è che il cerchio di testa della ruota maggiore non si estenda oltre il punto H individuato dall'intersezione della retta d'azione a con la perpendicolare condotta su di essa dal centro O_1 della ruota minore. Con le notazioni di FIGURA **1** possiamo scrivere pertanto:

$$\overline{O_2H} = \overline{O_2C} + \overline{CK} \qquad (1)$$

e, applicando il teorema di Carnot al triangolo HCO_2:

$$\left(\overline{O_2H}\right)^2 = \left(\overline{O_2C}\right)^2 + \left(\overline{CH}\right)^2 - 2 \cdot \overline{O_2C} \cdot \overline{CH} \cdot \cos\,(180° - \varphi) \quad (2)$$

Essendo:

$$\cos\,(180° - \varphi) = -\cos\varphi \qquad \text{e} \qquad -\cos\varphi = -\,\text{sen}\,\theta$$

in quanto i due angoli suddetti sono complementari, la (2) diventa:

$$\left(\overline{O_2H}\right)^2 = \left(\overline{O_2C}\right)^2 + \left(\overline{CH}\right)^2 + 2 \cdot \overline{O_2C} \cdot \overline{CH} \cdot \text{sen}\,\theta$$

Elevando la (1) al quadrato e uguagliando il secondo membro a quello della relazione sopra scritta, si ottiene:

$$\left(\overline{O_2C}\right)^2 + \left(\overline{CK}\right)^2 + 2 \cdot \overline{O_2C} \cdot \overline{CK} =$$

$$= \left(\overline{O_2C}\right)^2 + \left(\overline{CH}\right)^2 + 2 \cdot \overline{O_2C} \cdot \overline{CH} \cdot \text{sen}\,\theta$$

Poiché dal triangolo rettangolo O_1HC risulta:

$$\overline{CH} = \overline{O_1C} \cdot \text{sen}\,\theta$$

sostituendo e semplificando, risulta:

$$\left(\overline{CK}\right)^2 + 2 \cdot \overline{O_2C} \cdot \overline{CK} = \left(\overline{O_1C}\right)^2 \cdot \text{sen}^2\,\theta + 2 \cdot \overline{O_2C} \cdot \overline{O_1C} \cdot \text{sen}^2\,\theta$$

da cui segue:

$$\left(\overline{CK}\right)^2 + 2 \cdot \overline{O_2C} \cdot \overline{CK} -$$

$$-\left(\left(\overline{O_1C}\right)^2 \cdot \text{sen}^2\,\theta + 2 \cdot \overline{O_2C} \cdot \overline{O_1C} \cdot \text{sen}^2\,\theta\right) = 0$$

Si perviene così a un'equazione di secondo grado in cui l'incognita è rappresentata dal segmento $\overline{CK}$; risolvendola, si ottiene:

$$\overline{CK} = -\overline{O_2C} + \sqrt{\left(\overline{O_2C}\right)^2 + \left(\overline{O_1C}\right)^2 \cdot \text{sen}^2\,\theta + 2 \cdot \overline{O_2C} \cdot \overline{O_1C} \cdot \text{sen}^2\,\theta}$$

ossia, estraendo dalla radice il termine $\overline{O_1C}$:

$$\overline{CK} = +\overline{O_1C} \cdot \left(\sqrt{\frac{\left(\overline{O_2C}\right)^2}{\left(\overline{O_1C}\right)^2} + \left(1 + 2 \cdot \frac{\overline{O_2C}}{\overline{O_1C}}\right) \cdot \text{sen}^2\,\theta} - \frac{\overline{O_2C}}{\overline{O_1C}}\right)$$

I vari termini della relazione sopra scritta hanno il seguente significato:

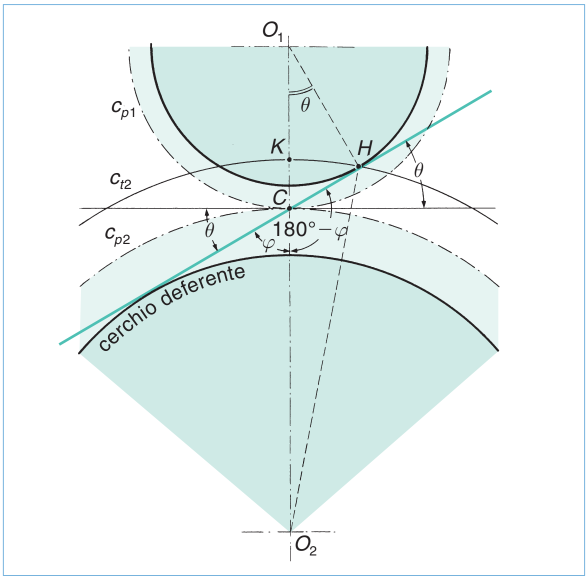
- $\overline{CK}$ è la distanza intercorrente fra la circonferenza di testa e quella primitiva; nel sistema modulare è $\overline{CK} = m$;
- $\overline{O_1C}$ è il raggio primitivo della ruota minore; per esso è valida la relazione:

$$\overline{O_1C} = r_{p1} = \frac{m \cdot z'}{2}$$

- $\overline{O_2C}$ è il raggio primitivo della ruota maggiore; poiché esso si esprime con una relazione analoga a quella scritta per $\overline{O_1C}$, è anche:

$$\frac{\overline{O_2C}}{\overline{O_1C}} = \frac{z''}{z'}$$

Operando le sostituzioni sopra scritte si perviene alla formula risolutiva (11.15) del testo.



1 Minimo numero di denti ottenuto rinunciando a un tratto di evolvente.