Approfondimento

Dimostrazione della 14.2

La dimostrazione della formula che lega fra loro le tensioni T e t esistenti nei due rami della cinghia è piuttosto complessa, come avevamo anticipato nel primo volume del testo. È necessario inoltre far ricorso al calcolo differenziale, non essendo possibile trattare l'argomento in forma più semplice.

Consideriamo un tratto di cinghia infinitamente piccolo, limitato dall'angolo $d\varphi$ (FIGURA **1**) e valutiamo le forze che agiscono su di esso; rileviamo:

- la tensione θ agente a uno dei due estremi del tratto considerato e inclinata dell'angolo $d\varphi/2$ rispetto alla direzione y;
- la tensione $\theta + d\theta$ agente all'estremità opposta, inclinata anch'essa dell'angolo $d\varphi/2$, incrementata, rispetto alla prima, di una certa quantità dovuta all'attrito di avvolgimento;
- la reazione dN con cui la puleggia reagisce alle sollecitazioni derivanti dalle tensioni trasmesse dalla cinghia alla puleggia stessa;
- la resistenza di attrito $f \cdot dN$ dovuta alla forza dN e disposta in modo da opporsi allo strisciamento della cinghia sulla puleggia.

In condizioni di equilibrio, devono essere nulle le sommatorie delle componenti di tutte le forze agenti sia nella direzione *x* sia nella direzione *y* normale alla prima.

Per l'equilibrio in direzione y deve essere:

$$\theta \cdot \cos\frac{d\varphi}{2} + f \cdot dN - (\theta + d\theta) \cdot \cos\frac{d\varphi}{2} = 0$$

e per l'equilibrio in direzione x:

$$\theta \cdot \operatorname{sen}\frac{d\varphi}{2} + (\theta + d\theta) \cdot \operatorname{sen}\frac{d\varphi}{2} - dN = 0$$

Le due relazioni sopra scritte possono essere notevolmente semplificate ricordando che $d\varphi$ è un angolo infinitamente piccolo, quindi si può porre:

$$\cos\frac{d\varphi}{2} \cong 1 \qquad \operatorname{sen}\frac{d\varphi}{2} \cong \frac{d\varphi}{2}$$

e le relazioni suddette diventano:

$$\begin{cases} \theta + f \cdot dN - (\theta + d\theta) = 0 \\ \theta \cdot \dfrac{d\varphi}{2} + (\theta + d\theta) \cdot \dfrac{d\varphi}{2} - dN = 0 \end{cases}$$

Sviluppando:

$$\begin{cases} \theta + f \cdot dN - \theta - d\theta = 0 \\ \theta \cdot \dfrac{d\varphi}{2} + \theta \cdot \dfrac{d\varphi}{2} + d\theta \cdot \dfrac{d\varphi}{2} - dN = 0 \end{cases}$$

e ricordando che il termine:

$$d\theta \cdot \frac{d\varphi}{2}$$

è un infinitesimo di ordine superiore (e pertanto trascurabile) si ottiene:

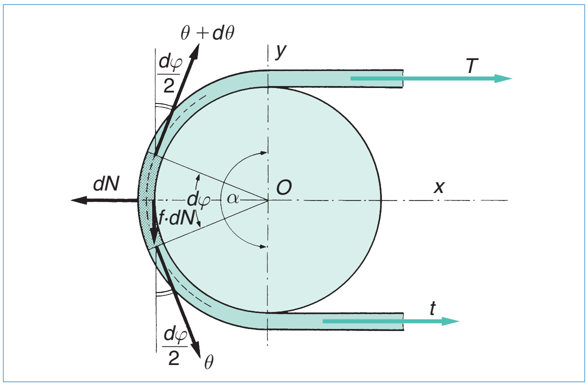
$$\begin{cases} f \cdot dN - d\theta = 0 \\ \theta \cdot d\varphi - dN = 0 \end{cases}$$

Sostituendo nella prima relazione l'espressione della forza dN ricavata dalla seconda, risulta $d\theta = f \cdot \theta \cdot d\varphi$, che possiamo anche scrivere nella forma:

$$\frac{d\theta}{\theta} = f \cdot d\varphi$$

Integrando l'equazione differenziale così ottenuta e tenendo conto che i limiti di integrazione sono:

- t e T per la tensione nei rami della cinghia,
- 0 e α per l'angolo di avvolgimento,



1 Calcolo delle tensioni nei due rami della cinghia.

si ottiene:

$$\int_t^T \frac{d\theta}{\theta} = \int_0^\alpha f \cdot d\varphi$$

da cui segue: $\ln T - \ln t = f \cdot \alpha$, ossia:

$$\ln \frac{T}{t} = f \cdot \alpha$$

Passando dai logaritmi ai numeri, si ha:

$$\frac{T}{t} = e^{f \cdot \alpha}$$

da cui si ottiene, infine, la formula risolutiva:

$$T = t \cdot e^{f \cdot \alpha}$$