Trasformazioni isotermiche: dimostrazioni

Nel piano p - v, si possono tracciare una infinità di iperboli, (una per ogni grado di temperatura) i cui punti d'incontro cadono all'infinito nelle direzioni individuate dagli assi p e v (FIGURA **1**).

Fra tutte le trasformazioni termodinamiche fondamentali l'isotermica è quella che più difficilmente si avvicina al caso reale; si può ritenere (con approssimazione molto vaga) che essa si verifichi in alcuni compressori fortemente raffreddati, in modo che il fluido compresso ceda gradualmente il calore generato dalla compressione all'acqua di raffreddamento che circola nell'intercapedine dei cilindri, in modo che la temperatura non subisca variazioni fra l'entrata e l'uscita dalla macchina.

Il lavoro compiuto dalle forze esterne sul gas, nell'isotermica di compressione (o quello compiuto dal gas nell'isotermica di espansione) non può essere calcolato con la (16.15) del testo non essendo costante la pressione durante tutta la trasformazione; esso può essere facilmente dedotto dall'espressione del lavoro elementare ($\mathrm{d}l = p \cdot \mathrm{d}v$), che, ricordando l'equazione di stato ($p \cdot v = R \cdot T$), dalla quale si ricava:

$$p = \frac{R \cdot T}{v}$$

diventa:

$$\mathrm{d}l = \frac{R \cdot T}{v} \cdot \mathrm{d}v$$

Integrando tale espressione fra i punti 1) e 2) corrispondenti allo stato fisico iniziale e a quello finale:

$$l = \int_1^2 \frac{R \cdot T}{v} \cdot \mathrm{d}v = R \cdot T \int_1^2 \frac{\mathrm{d}v}{v} = R \cdot T \cdot \ln \frac{v_2}{v_1}$$

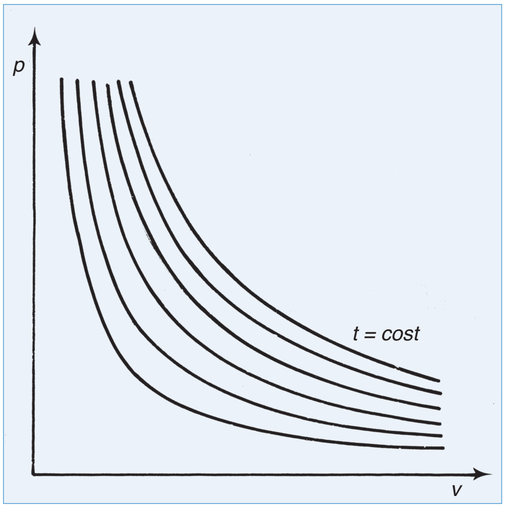
si ottiene:

$$l = R \cdot T \cdot \ln \frac{v_2}{v_1} \tag{1}$$

$$l = p_1 \cdot v_1 \cdot \ln \frac{v_2}{v_1} \tag{2}$$

formula che dà luogo, con passaggi evidenti, alle tre seguenti:

$$l = p_1 \cdot v_1 \cdot \ln \frac{p_1}{p_2} \quad l = p_2 \cdot v_2 \cdot \ln \frac{v_2}{v_1} \quad l = p_2 \cdot v_2 \cdot \ln \frac{p_1}{p_2}$$



1 Fascio di isotermiche

tutte dedotte dalla prima, tenendo presente l'equazione di stato, e la $p_1 \cdot v_1 = p_2 \cdot v_2$.
Poiché in una trasformazione isotermica non si manifesta alcuna variazione di temperatura, è anche $u_2 - u_1 = c_v \cdot (T_2 - T_1)$ e l'equazione fondamentale della termodinamica, si riduce alla forma:

$$q = l \tag{3}$$

In altre parole, per mantenere costante la temperatura durante la compressione, la quantità di calore sottratta all'aeriforme deve essere uguale al lavoro somministrato dall'esterno; tenendo presente la (2):

$$q = p_1 \cdot v_1 \cdot \ln \frac{v_2}{v_1} \tag{4}$$

Per quanto riguarda le variazioni di entropia, $\mathrm{d}s = \frac{\mathrm{d}q}{T}$, essendo nell'isotermica $T = \text{costante}$ ne segue:

$$s_2 - s_1 = \int_1^2 \frac{\mathrm{d}q}{T} = \frac{1}{T} \cdot \int_1^2 \mathrm{d}q = \frac{q_2 - q_1}{T}$$

e poiché la differenza $(q_2 - q_1)$ rappresenta il calore scambiato dall'unità di massa di gas durante la trasformazione, dalla (4) si ricava:

$$s_2 - s_1 = \frac{1}{T} \cdot p_1 \cdot v_1 \cdot \ln \frac{v_2}{v_1} \tag{5}$$