Trasformazioni politropiche: dimostrazioni

Analogamente a quanto esposto per le adiabatiche, potremo parlare di **compressione politropica** e di **espansione politropica**; la prima avviene con somministrazione di lavoro dall'esterno (negativo) mentre nella seconda, si somministra del calore e si ottiene lavoro (positivo) fornito dal gas.

Nelle ipotesi fatte, potremo definire — nel caso più generale — una trasformazione politropica come una trasformazione durante la quale viene scambiata una quantità di calore q' proporzionale al salto di temperatura che il gas subisce nel passaggio dallo stato fisico iniziale a quello finale; in termini analitici:

$$q' = c \cdot (T_2 - T_1) \qquad (1)$$

nella quale il coefficiente di proporzionalità c può essere inteso come un particolare valore del calore specifico del gas, costante per tutta la durata della trasformazione; a ogni valore conferito all'esponente n della politropica corrisponde un valore ben determinato del coefficiente c.

L'equazione fondamentale della termodinamica, diventa per una trasformazione politropica: $c \cdot (T_2 - T_1) = c_v \cdot (T_2 - T_1) + l$,
e ricordando che:

$$1 = \frac{c_p - c_v}{R}$$

si può scrivere:

$$c \cdot (T_2 - T_1) = c_v \cdot (T_2 - T_1) + \frac{c_p - c_v}{R} \cdot l$$

e ricavare il termine l :

$$l = \frac{(c - c_v) \cdot (T_2 - T_1)}{c_p - c_v} \cdot R = \frac{c - c_v}{c_p - c_v} \cdot (R \cdot T_2 - R \cdot T_1)$$

Cambiando di segno i termini del secondo membro:

$$l = \frac{c_v - c}{c_p - c_v} \cdot (R \cdot T_1 - R \cdot T_2)$$

e confrontando con la (11) dell'approfondimento online relativo alle trasformazioni adiabatiche, nella quale riteniamo che sia $\gamma = n$, ne segue:

$$\frac{c_v - c}{c_p - c_v} = \frac{1}{n - 1}$$

e da questa, con semplici passaggi:

$$n = \frac{c_p - c}{c_v - c} \qquad (2)$$

oppure nella forma inversa:

$$c = \frac{n \cdot c_v - c_p}{n - 1} \qquad (3)$$

è possibile ricavare il valore da assegnare al coefficiente c in funzione dell'esponente n della politropica e dei calori specifici (c_p e c_v) del gas in questione.

Per la valutazione del lavoro scambato lungo una politropica a esponente n si possono impiegare le relazioni (12) e (13) già illustrate nell'approfondimento online relativo alle trasformazioni adiabatiche, sostituendo all'esponente γ caratteristico dell'adiabatica, il nuovo esponente n definito dalla (2); otterremo:

$$l = \frac{p_1 \cdot v_1}{n - 1} \cdot \left(1 - \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^{n-1}\right) \qquad (4)$$

oppure:

$$l = \frac{p_1 \cdot v_1}{n - 1} \cdot \left(1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{n-1}{n}}\right) \qquad (5)$$

Per quanto concerne le variazioni di entropia subite dal fluido, tenendo conto che:

$$\mathrm{d}s = \frac{\mathrm{d}q}{T} = \frac{c \cdot \mathrm{d}T}{T}$$

si ottiene facilmente:

$$s_2 - s_1 = \int_1^2 \frac{c \cdot \mathrm{dT}}{T} = c \cdot \int_1^2 \frac{\mathrm{dT}}{T} = c \cdot \ln \frac{T_2}{T_1} \qquad (6)$$