Approfondimento

Rendimento del ciclo Otto

Per il calcolo del rendimento termico ideale del ciclo Otto, ci si avvale della formula generale (19.4) del testo:

$$\eta_{id} = \frac{q_1 - q_2}{q_1}$$

in cui, per le ipotesi fatte, le quantità di calore q_1 e q_2 vengono scambiate con l'esterno, mentre il fluido mantiene costante il proprio volume. Sarà pertanto:

$$q_1 = c_v \cdot (T_3 - T_2)$$

$$q_2 = c_v \cdot (T_4 - T_1)$$

Sostituendo nella formula del rendimento, otteniamo:

$$\eta_{id} = \frac{c_v \cdot (T_3 - T_2) - c_v \cdot (T_4 - T_1)}{c_v \cdot (T_3 - T_2)} \qquad (1)$$

che potremo anche scrivere:

$$\eta_{id} = 1 - \frac{(T_4 - T_1)}{(T_3 - T_2)}$$

ritenendo di considerare uguali i valori numerici dei due calori specifici c_v che compaiono al numeratore e al denominatore del secondo membro, supposizione non del tutto esatta in quanto essi sono riferiti a intervalli di temperature ben diversi. Tuttavia, data la notevole semplificazione che tale ipotesi introduce nel calcolo e l'imprecisione del tutto trascurabile cui si perviene, è perfettamente lecito ridurre la relazione (1) alla forma soprascritta.
Ponendo adesso in evidenza il termine T_1 al numeratore della frazione e il termine T_2 al denominatore della stessa, si ottiene:

$$\eta_{id} = 1 - \frac{T_1 \cdot \left(T_4 / T_1 - 1 \right)}{T_2 \cdot \left(T_3 / T_2 - 1 \right)} \qquad (2)$$

che è facile semplificare ulteriormente ricordando che le trasformazioni $1 \rightarrow 2$ e $3 \rightarrow 4$ sono, per ipotesi, delle adiabatiche, le cui equazioni, applicate ai punti estremi permettono di scrivere:

$$T_1 \cdot v_1^{\gamma-1} = T_2 \cdot v_2^{\gamma-1}$$

$$T_3 \cdot v_3^{\gamma-1} = T_4 \cdot v_4^{\gamma-1}$$

e ricavare da queste:

$$\frac{T_1}{T_2}=\left(\frac{v_2}{v_1}\right)^{\gamma-1} \qquad \frac{T_4}{T_3}=\left(\frac{v_3}{v_4}\right)^{\gamma-1}$$

Da un esame della FIGURA **19.18** del testo si riscontra che:

$$v_4 = v_1 \quad \text{e} \quad v_3 = v_2$$

per cui:

$$\frac{T_1}{T_2}=\left(\frac{v_2}{v_1}\right)^{\gamma-1} \qquad \frac{T_4}{T_3}=\left(\frac{v_3}{v_4}\right)^{\gamma-1}=\left(\frac{v_2}{v_1}\right)^{\gamma-1}$$

e ne segue:

$$\frac{T_1}{T_2}=\frac{T_4}{T_3}$$

ovvero:

$$\frac{T_4}{T_1}=\frac{T_3}{T_2}$$

Ciò comporta l'uguaglianza fra numeratore e denominatore della frazione che appare nella formula (2); in altre parole, il rapporto:

$$\frac{{T_4}/{T_1}-1}{{T_3}/{T_2}-1}$$

è uguale all'unità, e la (2) si riduce alla forma più semplice:

$$\eta_{id}=1-\frac{T_1}{T_2}=1-\left(\frac{v_2}{v_1}\right)^{\gamma-1} \tag{3}$$

Definiamo **rapporto di compressione** volumetrico r il quoziente fra il volume iniziale (pari al volume di fluido contenuto nel cilindro quando Io stantuffo si trova al punto morto inferiore) e quello di fine compressione:

$$r=\frac{v_1}{v_2}$$

ne segue:

$$\eta_{id}=1-\frac{1}{r^{\gamma-1}} \tag{4}$$

ottenendo la relazione che esprime il rendimento termico ideale del ciclo (termodinamico) Otto in funzione del rapporto di compressione r e della costante γ che, nelle ipotesi premesse, assume il valore invariabile $\gamma=1{,}41$ avendo supposto che il fluido intermediario sia costituito da un gas perfetto.