Rendimento del ciclo Sabathé

L'espressione del calore ceduto al refrigerante q_2 non è mutata rispetto ai cicli precedenti, in quanto la relativa fase avviene sempre a volume costante; possiamo scrivere perciò $q_2 = c_v \cdot (T_4 - T_1)$, mentre il calore speso q_1 è la somma di una prima aliquota $q_1^{'}$ somministrata a volume costante, $q_1^{'} = c_v \cdot (T_{2'} - T_2)$, e di una seconda frazione $q_1^{''}$ somministrata a pressione costante, $q_1^{''} = c_p \cdot (T_3 - T_{2'})$, per cui: $q_1 = c_v \cdot (T_{2'} - T_2) + c_p \cdot (T_3 - T_{2'})$.
Sostituendo nella formula generale del rendimento, si ottiene:

$$\eta_{id} = 1 - \frac{q_2}{q_1} = 1 - \frac{c_v \cdot (T_4 - T_1)}{c_v \cdot (T_{2'} - T_2) + c_p \cdot (T_3 - T_{2'})}$$

ovvero, dividendo sopra e sotto per c_v:

$$\eta_{id} = 1 - \frac{(T_4 - T_1)}{(T_{2'} - T_2) + \gamma \cdot (T_3 - T_{2'})}$$ [1]

[1] Ricordiamo che $\gamma = c_p/c_v$

che potremo ancora modificare ponendo in evidenza il termine T_1 al numeratore e il termine T_2 al denominatore del secondo membro:

$$\eta_{id} = 1 - \frac{T_1}{T_2} \cdot \frac{(T_4/T_1 - 1)}{(T_{2'}/T_2 - 1) + \gamma \cdot (T_3/T_2 - T_{2'}/T_2)} \qquad (1)$$

Per le adiabatiche $3 \rightarrow 4$ e $1 \rightarrow 2$ valgono ovviamente le relazioni:

$$p_4 \cdot v_4^{\gamma} = p_3 \cdot v_3^{\gamma} \qquad p_1 \cdot v_1^{\gamma} = p_2 \cdot v_2^{\gamma}$$

che divise fra loro membro a membro portano alla relazione:

$$\frac{p_4 \cdot v_4^{\gamma}}{p_1 \cdot v_1^{\gamma}} = \frac{p_3 \cdot v_3^{\gamma}}{p_2 \cdot v_2^{\gamma}}$$

e con le sostituzioni consentite dalle uguaglianze rilevabili dalla (FIGURA **19.22**) del testo:

$$v_4 = v_1 \quad v_2 = v_{2'} \quad p_3 = p_{2'}$$

ci conducono alla relazione:

$$\frac{p_4}{p_1} = \frac{p_{2'}}{p_2} \cdot \left(\frac{v_3}{v_{2'}} \right)^{\gamma}$$

Che, ricordando le definizioni (19.14) e (19.15) del testo, diventa:

$$\frac{p_4}{p_1} = \rho \cdot C^{\gamma}$$

Tenendo conto che la trasformazione $4 \rightarrow 1$ è a volume costante, vale la relazione:

$$\frac{p_4}{p_1} = \frac{T_4}{T_1}$$

e perciò anche:

$$\frac{T_4}{T_1} = \rho \cdot C^{\gamma} \tag{2}$$

Allo stesso modo, dall'isometrica $2 \rightarrow 2'$:

$$\frac{T_{2'}}{T_2} = \frac{p_{2'}}{p_2} = \rho \tag{3}$$

Ponendo infine:

$$\frac{T_3}{T_2} = \frac{T_3}{T_{2'}} \cdot \frac{T_{2'}}{T_2}$$

e ricavando dall'isobarica $2' \rightarrow 3$:

$$\frac{T_3}{T_{2'}} = \frac{v_3}{v_{2'}} = C$$

si ottiene:

$$\frac{T_3}{T_2} = C \cdot \rho \tag{4}$$

Sostituendo le espressioni (2), (3) e (4) nella relazione (1) si arriva alla formula:

$$\eta_{id} = 1 - \frac{T_1}{T_2} \cdot \frac{\left(\rho \cdot C^{\gamma} - 1\right)}{(\rho - 1) + \gamma \cdot (C \cdot \rho - \rho)}$$

che può essere posta nella forma definitiva:

$$\eta_{id} = 1 - \left(\frac{1}{r}\right)^{\gamma - 1} \cdot \frac{\rho \cdot C^{\gamma} - 1}{\rho - 1 + \rho \cdot \gamma \cdot (C - 1)} \tag{5}$$

ricordando che anche per il ciclo Sabathé vale la relazione già trovata per i cicli precedenti:

$$\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^{\gamma - 1} = \left(\frac{1}{r}\right)^{\gamma - 1}$$