Approfondimento

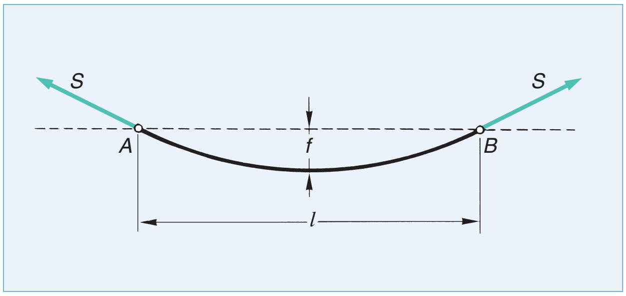
Equilibrio delle funi

I fili, le funi, le catene a maglie piccole e in genere tutti gli organi flessibili di una certa lunghezza, fissati ai due estremi, sono soggetti al proprio peso e assumono una configurazione di equilibrio tale che ogni sezione è sollecitata a trazione; lo stesso avviene se, in aggiunta al peso proprio, sono presenti anche carichi esterni concentrati o ripartiti su tutta la loro lunghezza.

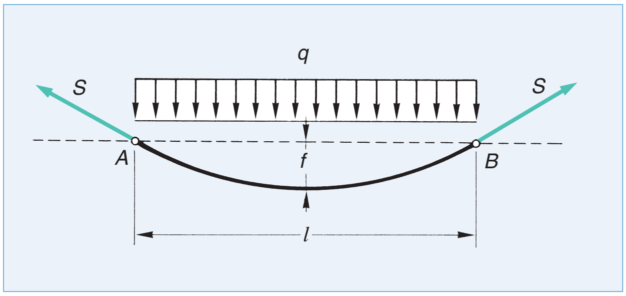
In ogni caso, la configurazione di equilibrio assunta dalla fune comporta una certa **freccia** (FIGURA **1**), dipendente dall'entità del peso per unità di lunghezza q della fune e dalla forza di trazione esercitata nella fase di montaggio.

Possono verificarsi due casi distinti, secondo il valore della freccia di inflessione f:

- la freccia f è molto piccola rispetto alla distanza l esistente fra i due punti estremi di attacco; in questo caso, per la modesta inclinazione della fune, il suo peso q per unità di lunghezza si può ritenere applicato sulla proiezione orizzontale (FIGURA **2**) con notevole facilità di calcolo;
- la freccia è notevole rispetto alla distanza l fra i due punti di attacco, per cui l'approssimazione suddetta non è più valida e il calcolo risulta più complesso.



1 Equilibrio delle funi.



2 Equilibrio delle funi molto tese.

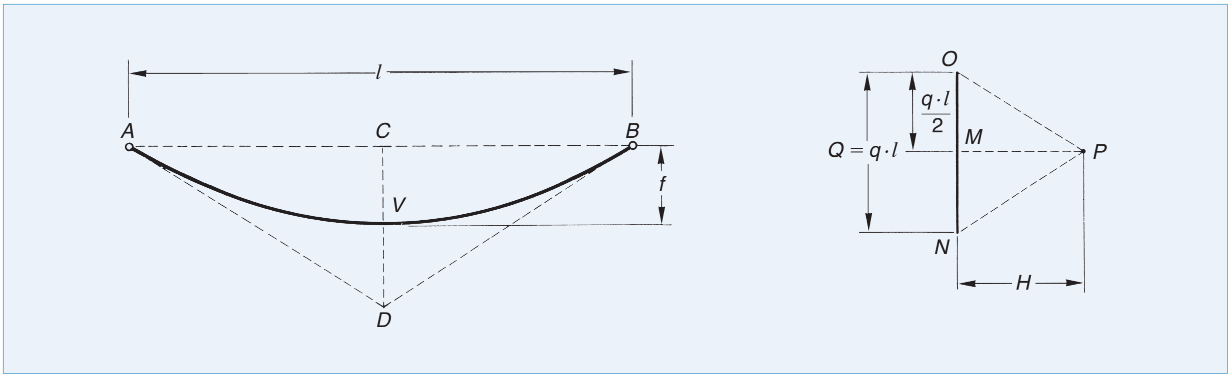
Ci limiteremo perciò allo studio delle **funi molto tese**, cercando di stabilire l'entità degli sforzi che le sollecitano nelle varie sezioni. Siano A e B i due punti di attacco, posti allo stesso livello, distanti l fra loro (FIGURA **3** a pagina seguente), e f la freccia di inflessione della fune, il cui peso per unità di lunghezza indicheremo con q. Poiché il peso totale Q di tutta la fune vale:

$$Q = q \cdot l$$

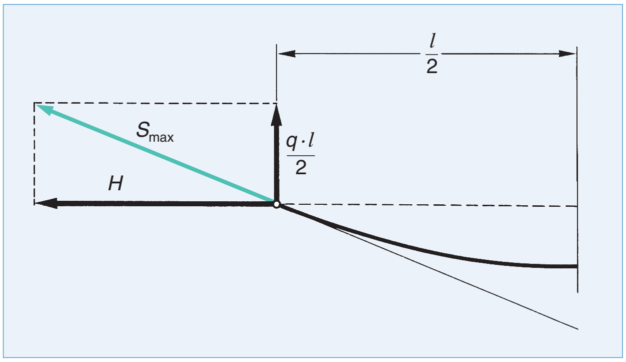
riportando a parte un vettore $(\overline{ON})$ proporzionale a Q e sfruttando la nota costruzione del poligono funicolare, è possibile tracciare i due segmenti $\overline{AD}$ e $\overline{BD}$, determinando la configurazione di equilibrio corrispondente a un carico Q concentrato nel punto di mezzo.

Nel caso in esame, però, il carico è ripartito e la configurazione di equilibrio della fune è parabolica; per la nota proprietà della parabola è

$$\overline{VC} = \frac{1}{2} \cdot \overline{CD} \qquad \text{ossia} \qquad \overline{CD} = 2 \cdot f$$



3 Calcolo della componente orizzontale *H* dello sforzo agente sulla fune.



4 Calcolo dello sforzo nei punti di attacco della fune.

Dalla similitudine dei triangoli *ACD* e *PMO* si ricava:

$$H : \frac{l}{2} = \frac{q \cdot l}{2} : (2 \cdot f)$$

da cui segue:

$$\boxed{H = \frac{q \cdot l^2}{8 \cdot f}} \qquad (1)$$

relazione che permette di calcolare la componente orizzontale *H* dello sforzo *S* in ogni punto della fune, in funzione degli altri elementi noti.

▶ In corrispondenza del vertice *V* della parabola, lo sforzo *S* coincide con la componente *H*. Nelle altre sezioni esso viene determinato componendo *H* con il peso del tratto di fune compreso fra il vertice e la sezione considerata.

Lo sforzo *S* è perciò massimo nei due punti di attacco (FIGURA **4**), dove è espresso dalla relazione:

$$S_{max} = \sqrt{H^2 + \left(\frac{q \cdot l}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{q \cdot l^2}{8 \cdot f}\right)^2 + \left(\frac{q \cdot l}{2}\right)^2}$$

Ponendo $n = f / l$, si ottiene:

$$S_{max} = \frac{q \cdot l^2}{8 \cdot f} \sqrt{1 + 16 \cdot n^2}$$

relazione che può essere approssimata **1** nel modo seguente:

$$S_{max} = \frac{q \cdot l^2}{8 \cdot f} \cdot (1 + 8 \cdot n^2) = H \cdot (1 + 8 \cdot n^2) \qquad (2)$$

oppure, con semplici passaggi:

$$S_{max} = q \cdot l \cdot \frac{1 + 8 \cdot n^2}{8 \cdot n} \qquad (3)$$

È chiaro che la lunghezza effettiva *L* della fune deve essere maggiore della distanza *l* fra i due punti di attacco; la maggiorazione sarà tanto più grande quanto più ampia è la freccia di inflessione.

1 Il passaggio alla formula approssimata (2) comporta la conoscenza degli sviluppi in serie di alcune funzioni; nel caso attuale, limitando lo sviluppo al secondo termine della serie:

$$\sqrt{1 - x^2} \cong 1 + \frac{x^2}{2}$$

e ponendo $x = 4 \cdot n$ si ottiene la (2).

Senza addentrarci in una laboriosa dimostrazione che comporta l'uso dei processi di integrazione, ci limitiamo a riportare la formula risolutiva:

$$L = l + \frac{8}{3} \cdot \frac{f^2}{l} \tag{4}$$

sufficiente per lo svolgimento dei problemi.

ESERCIZI

1 ESERCIZIO SVOLTO

Argomento *Funi tese*

Un filo di ferro del diametro di 8 mm è fissato ai due estremi *A* e *B* posti allo stesso livello e distanti 200 m fra loro. Se la freccia *f* è di 10 m, si calcoli lo sforzo in mezzeria *H*, lo sforzo massimo S_{max} nei punti di attacco e si verifichi la condizione di resistenza. Assumere ρ = 7,8 kg/dm³ e σ_{am} = 120 N/mm².

▶ Calcoliamo innanzitutto il peso *q* per unità di lunghezza del filo:

$$q = A \cdot \rho \cdot g \cdot 1 = A \cdot \rho \cdot g$$

se con *A* si indica l'area della sezione retta del filo stesso. Con i dati numerici assegnati risulta:

$$A = \pi \cdot r^2 = 3{,}14 \cdot 4^2 \cong 50{,}24 \text{ mm}^2 = 50{,}24 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2$$

e anche:

$$q = A \cdot \rho \cdot g = 50{,}24 \cdot 10^{-6} \cdot 7{,}8 \cdot 9{,}81 = 3{,}84 \text{ N/m}$$

Ciò premesso, lo sforzo *H* in mezzeria vale:

$$H = \frac{q \cdot l^2}{8 \cdot f} = \frac{3{,}84 \cdot 200^2}{8 \cdot 10} = 1920 \text{ N}$$

mentre nei punti di attacco occorre calcolare l'entità della risultante S_{max} dovuta alla componente *H* e alla metà *Q* del peso complessivo del filo. Essendo:

$$Q = \frac{q \cdot l}{2} = \frac{3{,}84 \cdot 200}{2} = 384 \text{ N}$$

si ottiene:

$$S_{max} = \sqrt{1920^2 + 384^2} \cong 1958 \text{ N}$$

Quindi la tensione interna σ nei punti di attacco vale:

$$\sigma = \frac{S_{max}}{A} = \frac{1958}{50{,}24} \cong 39 \text{ N/mm}^2$$

e la resistenza del filo è largamente assicurata.

ESERCIZI PROPOSTI

1.a ▲△△ Con riferimento all'esercizio precedente, calcolare il valore che deve assumere la freccia *f* affinché la tensione interna σ risulti di 100 N/mm², fermi restando gli altri dati del problema.

Soluzione: $f \cong 3{,}83$ m.

1.b ▲△△ Una fune lunga 102 m viene fissata a due punti *A* e *B* posti allo stesso livello e distanti 100 m fra loro. Trascurando l'allungamento elastico subito dalla fune, determinare il valore della freccia *f*.

Soluzione: $f \cong 8{,}66$ m.

1.c ▲△△ Un filo di acciaio, teso fra due punti distanti 500 m e posti allo stesso livello, forma una freccia pari al 2% della lunghezza. Verificare la resistenza del filo assumendo σ_{am} = 180 N/mm² e ρ = 7,8 kg/dm³.

Soluzione: $\sigma \cong 240$ N/mm²; il filo non è in condizioni di sicurezza.

QUESITI

Lo sforzo in una fune tesa tra due attacchi è:

a massimo a metà della fune.

b uguale ovunque.

c massimo in corrispondenza degli attacchi.

d massimo a 1/4 della distanza tra gli attacchi.