Approfondimento

Dimostrazione della (29.9)

Per quanto esposto in precedenza nel testo, potremo scrivere:

$$2 \cdot (\Delta h)_a = \bar{c}_1^2$$

e anche:

$$2 \cdot (\Delta h)_r = w_2^2 - w_1^2$$

sommando membro a membro:

$$2 \cdot \left[(\Delta h)_a + (\Delta h)_r \right] = \bar{c}_1^2 + \bar{w}_2^2 - \bar{w}_1^2$$

ossia:

$$2 \cdot (\Delta h)_t = \bar{c}_1^2 + \bar{w}_2^2 - \bar{w}_1^2$$

Sostituendo nella (29.8) del testo e ricordando l'espressione del lavoro interno:

$$\bar{l}_i = 2 \cdot \bar{u} \cdot \left(\bar{c}_1 \cdot \cos\bar{\alpha}_2 - \bar{c}_2 \cdot \cos\bar{\alpha}_2 \right)$$

si ottiene:

$$\bar{\eta}_p = \frac{2 \cdot \bar{u} \cdot \left(\bar{c}_1 \cdot \cos\bar{\alpha}_2 - \bar{c}_2 \cdot \cos\bar{\alpha}_2 \right)}{\bar{c}_1^2 + \bar{w}_2^2 - \bar{w}_1^2}$$

ed essendo per le ipotesi fatte $\bar{c}_1 = \bar{w}_2$, è anche:

$$\bar{\eta}_p = \frac{2 \cdot \bar{u} \cdot \left(\bar{c}_1 \cdot \cos\bar{\alpha}_2 - \bar{c}_2 \cdot \cos\bar{\alpha}_2 \right)}{2 \cdot \bar{c}_1^2 - \bar{w}_1^2} \qquad (1)$$

Tracciati i triangoli delle velocità con il vertice in comune e operato il consueto ribaltamento intorno all'asse $\overline{OO'}$ (FIGURA 1) si ricavano le relazioni:

$$\bar{c}_2 \cdot \cos\left(180° - \bar{\alpha}_2\right) = -\bar{c}_2 \cdot \cos\bar{\alpha}_2 = \bar{c}_1 \cdot \cos\bar{\alpha}_1 - \bar{u}$$

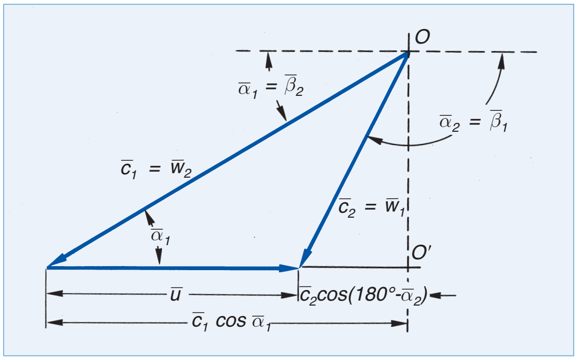
e anche:

$$\bar{w}_1^2 = \bar{c}_1^2 + \bar{u}^2 - 2 \cdot \bar{u} \cdot \bar{c}_1 \cdot \cos\bar{\alpha}_1$$

che sostituite nella (1) ci conducono a:

$$\bar{\eta}_p = \frac{2 \cdot \bar{u} \cdot \left(2 \cdot \bar{c}_1 \cdot \cos\bar{\alpha}_1 - \bar{u} \right)}{2 \cdot \bar{c}_1^2 - \bar{c}_1^2 + \bar{u}^2 - 2 \cdot \bar{u} \cdot \bar{c}_1 \cdot \cos\bar{\alpha}_1} =$$

$$= \frac{2 \cdot \bar{u} \cdot \left(2 \cdot \bar{c}_1 \cdot \cos\bar{\alpha}_1 - \bar{u} \right)}{\bar{c}_1^2 + \bar{u}^2 - 2 \cdot \bar{u} \cdot \bar{c}_1 \cdot \cos\bar{\alpha}_1} = \frac{2 \cdot \bar{u} \cdot \left(2 \cdot \bar{c}_1 \cdot \cos\bar{\alpha}_1 - \bar{u} \right)}{\bar{c}_1^2 + \bar{u} \cdot \left(2 \cdot \bar{c}_1 \cdot \cos\bar{\alpha}_1 - \bar{u} \right)}$$



1 Triangoli di velocità ribaltati, per un elemento a reazione.

Dividendo numeratore e denominatore dell'espressione soprascritta per il termine $\bar{c}_1^2$:

$$\bar{\eta}_p = \frac{2\cdot\left(\bar{u}/\bar{c}_1\right)\cdot\left(2\cdot\cos\bar{\alpha}_1-\bar{u}/\bar{c}_1\right)}{1+\left(\bar{u}/\bar{c}_1\right)\cdot\left(2\cdot\cos\bar{\alpha}_1-\bar{u}/\bar{c}_1\right)}$$

e introducendo il coefficiente di velocità periferica $\bar{k}_u$:

$$\bar{\eta}_p = \frac{2\cdot\bar{k}_u\cdot\left(2\cdot\cos\bar{\alpha}_1-\bar{k}_u\right)}{1+\bar{k}_u\cdot\left(2\cdot\cos\bar{\alpha}_1-\bar{k}_u\right)} \qquad (2)$$

si ottiene l'espressione del rendimento della palettatura in funzione del rapporto $\bar{k}_u$ valida per il caso ideale di attriti nulli, che corrisponde alla (29.9) del testo.