Approfondimento

Cenni sulla flessione deviata

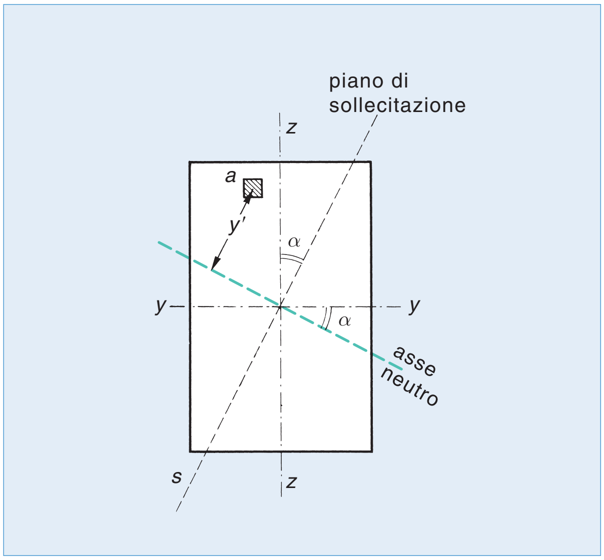
Se il piano di sollecitazione non contiene uno degli assi di simmetria della sezione (FIGURA **1**), ma forma con uno di essi un generico angolo α, la trave si incurva nel piano della sollecitazione generando sforzi di compressione e sforzi di trazione; esiste comunque uno *strato neutro* non soggetto a deformazione, la cui intersezione con il piano di una sezione generica individua un asse neutro, baricentrico rispetto alla sezione stessa, ma inclinato dell'angolo α rispetto a uno degli assi di simmetria. Si potrebbe però dimostrare che la tensione interna σ è calcolabile con una formula analoga a quella illustrata per la flessione retta:

$$\sigma = \frac{M \cdot y'}{I_n} \tag{1}$$

nella quale

- M rappresenta il momento flettente esterno;
- I_n è il momento d'inerzia della sezione valutato rispetto all'asse neutro;
- y' costituisce la distanza generica di un'area elementare dall'asse neutro, misurata parallelamente alla traccia s del piano di sollecitazione.

È chiaro che sia la valutazione delle distanze, sia il calcolo del momento d'inerzia della sezione non sono affatto agevoli, per cui **è preferibile far ricorso all'artificio di sostituire la flessione deviata con due flessioni rette**.



1 Flessione deviata.

Pidatella, Ferrari Aggradi, Pidatella, *Corso di meccanica, macchine ed energia* © Zanichelli 2012

A tal fine (FIGURA **2**) scomponiamo il momento flettente esterno M in due sollecitazioni parziali:

- un momento M_z agente nel piano di traccia y, il cui asse neutro è rappresentato dall'asse z;
- un momento M_y agente nel piano di traccia z, cui corrisponde l'asse neutro y.

Con le notazioni della (FIGURA **1**) abbiamo:

$$M_z = M \cdot \text{sen}\ \alpha \qquad M_y = M \cdot \cos\ \alpha$$

Poiché sia y sia z sono assi di simmetria della sezione, la trave è soggetta a due flessioni rette agenti in piani normali fra loro; le relative tensioni interne sono:

$$\sigma_{z(\max)} = \frac{M_z \cdot y_{\max}}{I_z} \qquad (2)'$$

$$\sigma_{y(\max)} = \frac{M_y \cdot z_{\max}}{I_y} \qquad (2)''$$

in cui le distanze ($y_{\max}$ e $z_{\max}$) sono misurate perpendicolarmente ai singoli assi neutri (FIGURA **3**) e i momenti d'inerzia sono calcolati rispetto a tali assi.

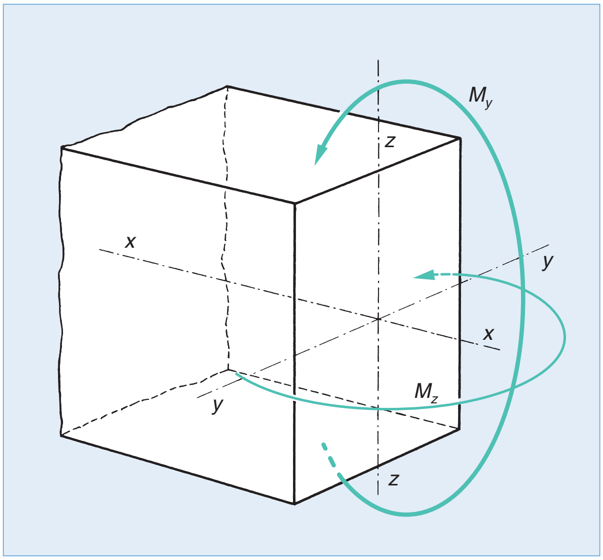
La tensione interna complessiva $\sigma_{\max}$ si ottiene dalla somma algebrica delle tensioni parziali:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_z \cdot y_{\max}}{I_z} \pm \frac{M_y \cdot z_{\max}}{I_y}$$

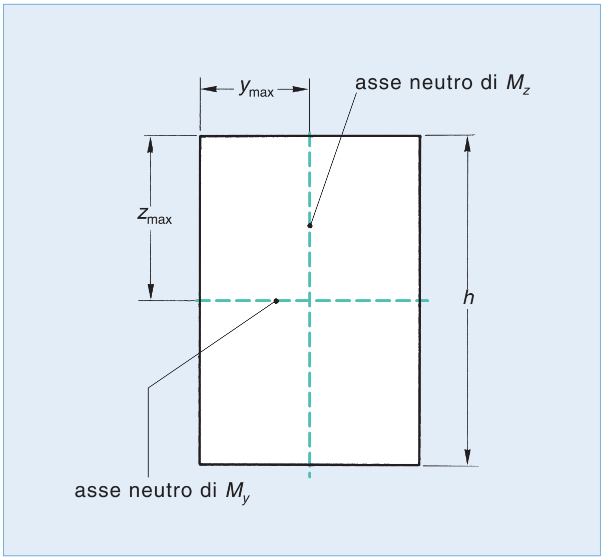
ovvero, ricordando le (2):

$$\sigma_{\max} = M \cdot \left(\frac{y_{\max} \cdot \text{sen}\ \alpha}{I_z} \pm \frac{z_{\max} \cdot \cos\ \alpha}{I_y} \right) \qquad (3)$$

Il doppio segno presente nella (3) avverte che si deve tener conto degli sforzi (di trazione o di compressione) dovuti ai due momenti parziali. Se, per esempio, il



2 Scomposizione in due flessioni rette.



3 Distanze massime delle tensioni interne parziali.

Pidatella, Ferrari Aggradi, Pidatella, *Corso di meccanica, macchine ed energia* © Zanichelli 2012

momento M è positivo, scomponendo la sezione in quattro quadranti (FIGURA **4**) avremo:

- nel primo quadrante:

  σ_y di trazione $\qquad$ σ_z di trazione
- nel secondo quadrante:

  σ_y di compressione $\qquad$ σ_z di trazione
- nel terzo quadrante:

  σ_y di compressione $\qquad$ σ_z di compressione
- nel quarto quadrante:

  σ_y di trazione $\qquad$ σ_z di compressione

Pertanto, se il materiale ha lo stesso carico di rottura a trazione e a compressione, sarà sufficiente la verifica della resistenza nel primo o nel terzo quadrante; se, viceversa, i carichi di rottura differiscono fra loro, sarà necessario eseguire entrambe le verifiche sopra accennate.

Anche per quanto riguarda le deformazioni subite dalla struttura, il procedimento non si discosta eccessivamente da quello precedente. Effettuata la scomposizione del momento flettente esterno nei momenti parziali M_y e M_z è possibile calcolare gli angoli di flessione fra le due sezioni estreme, dovuti ai due momenti:

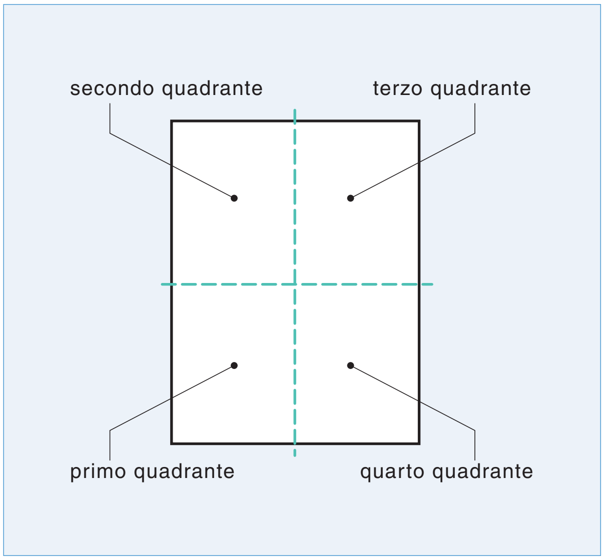
$$\varphi_z = \frac{M_z \cdot l}{E \cdot I_z} \qquad \varphi_y = \frac{M_y \cdot l}{E \cdot I_y}$$

che equivalgono a un'unica flessione, di angolo

$$\varphi = \sqrt{\varphi_z^2 + \varphi_y^2} \tag{4}$$

intorno a un asse n inclinato, rispetto a z, di un angolo β tale che:

$$\text{tg}\, \beta = \frac{\varphi_y}{\varphi_z} \tag{5}$$



4 Tensioni interne nei vari quadranti della sezione.

Pidatella, Ferrari Aggradi, Pidatella, *Corso di meccanica, macchine ed energia* © Zanichelli 2012

ESERCIZI

1 ESERCIZIO SVOLTO

Argomento *Flessione deviata*

Un verricello, costituito da un tamburo cavo lungo 1 m e dello spessore di 1 cm, è impiegato per spostare orizzontalmente grossi blocchi di pietra esercitando una forza traente di 2000 N. Il tamburo è di ferro e ha il diametro esterno di 20 cm. Calcolare la tensione interna dovuta alle sollecitazioni di flessione, trascurando temporaneamente gli effetti della torsione.

■ Lo sforzo F esercitato dalla fune ha direzione orizzontale e si sposta continuamente lungo il verricello mentre la fune stessa si avvolge sul tamburo. La sollecitazione è massima quando la fune si trova nella mezzeria del cilindro. In queste ipotesi, il cilindro stesso è soggetto a una sollecitazione di flessione nel piano orizzontale e il momento flettente nel suo punto di mezzo vale:

$$M_{f1} = R_a \cdot \frac{l}{2}$$

dove con l si indica la distanza intercorrente fra i due supporti che sostengono il tamburo. Poiché quest'ultimo è lungo 1 m, è ragionevole porre $l = 1{,}1$m, per cui risulta:

$$M_{f1} = \frac{F}{2} \cdot \frac{l}{2} = \frac{2000 \cdot 1{,}1}{2 \cdot 2} = 550 \text{ N·m}$$

Occorre però tener conto anche del peso del tamburo stesso, peso che produce un'inflessione nel piano verticale; calcolato perciò il peso complessivo del cilindro:

$$P = \rho \cdot g \cdot V = \rho \cdot g \cdot \frac{\pi}{4} \cdot (d_e^2 - d_i^2) \cdot l_1$$

si può ricavare il momento che sollecita la struttura nel piano verticale.

Con i dati numerici del testo ($\rho \cong 7{,}8$ kg/dm^3) è

$$P = 7{,}8 \cdot 9{,}81 \cdot \frac{3{,}14}{4} \cdot (2^2 - 1{,}8^2) \cdot 10 \cong 457 \text{ N}$$

e, di conseguenza:

$$M_{f2} = \frac{P}{2} \cdot \frac{l}{2} = \frac{457}{2} \cdot \frac{1{,}1}{2} \cong 126 \text{ N·m}$$

Poiché i due momenti agiscono in piani ortogonali, il momento risultante è

$$M_f = \sqrt{M_{f1}^2 + M_{f2}^2} = \sqrt{550^2 + 126^2} \cong 564 \text{ N·m}$$

per cui, calcolato il modulo di resistenza della sezione:

$$W_f = \frac{0{,}1}{d_e} \cdot (d_e^4 - d_i^4) = \frac{0{,}1}{200} \cdot (200^4 - 180^4) \cong 275\,000 \text{ mm}^2$$

la tensione interna σ vale:

$$\sigma = \frac{M_f}{W_f} = \frac{564\,000}{275\,000} \cong 2{,}05 \text{ N/mm}^2$$

decisamente trascurabile.

ESERCIZI PROPOSTI

1.a ▲△△ Una trave in Fe 430 avente sezione rettangolare 40 × 60 mm, è soggetta a un momento flettente costante, M_f = 2400 N · m, agente in un piano inclinato di 45° rispetto all'asse maggiore di simmetria della sezione. Calcolare il grado di sicurezza a della costruzione, ritenendo σ_r = 430 N/mm^2.

Soluzione: $a \cong 2{,}43$.

1.b ▲▲△ Con riferimento all'esercizio precedente, calcolare l'angolo di flessione φ formato dalle due sezioni estreme della trave, distanti 3,60 m fra loro.

Soluzione: $\varphi \cong 0{,}1$ rad.

Pidatella, Ferrari Aggradi, Pidatella, *Corso di meccanica, macchine ed energia* © Zanichelli 2012