Approfondimento

Trave appoggiata soggetta a un carico uniformemente ripartito: calcolo di *f* e di *α*

In precedenza abbiamo visto nel testo che:

- per un carico F concentrato all'estremo libero, la freccia f' si esprime con la relazione

$$f' = \frac{F \cdot l^3}{3 \cdot E \cdot I}$$

che nel caso ora in esame diventa:

$$f' = \frac{\left(\frac{q \cdot l}{2}\right) \cdot \left(\frac{l}{2}\right)^3}{3 \cdot E \cdot I} = \frac{q \cdot l^4}{48 \cdot E \cdot I}$$

- per il carico q uniformemente ripartito su tutta la lunghezza della mensola, la freccia d'inflessione (f'') vale:

$$f'' = \frac{q \cdot l^4}{8 \cdot E \cdot I}$$

e quindi, nel caso in esame:

$$f'' = \frac{q \cdot \left(\frac{l}{2}\right)^4}{8 \cdot E \cdot I} = \frac{q \cdot l^4}{128 \cdot E \cdot I}$$

Applicando il principio della sovrapposizione degli effetti, la freccia complessiva è $f = f' - f''$, in quanto le due condizioni di carico producono effetti opposti; sostituendo le relazioni sopra citate si ottiene:

$$f = \frac{q \cdot l^4}{48 \cdot E \cdot I} - \frac{q \cdot l^4}{128 \cdot E \cdot I}$$

Pidatella, Ferrari Aggradi, Pidatella, *Corso di meccanica, macchine ed energia* © Zanichelli 2012

e, in definitiva:

$$f = \frac{5}{384} \cdot \frac{q \cdot l^4}{E \cdot I} \tag{1}$$

Data la simmetria della struttura, le due estremità compiono rotazioni identiche ($\alpha = \beta$); considerando solo metà della trave e valutando separatamente le deformazioni prodotte dai due sistemi di carico, l'angolo α vale $\alpha = \alpha' - \alpha''$, in cui è

$$\alpha' = \frac{\frac{q \cdot l}{2} \cdot \left(\frac{l}{2}\right)^2}{2 \cdot E \cdot I} = \frac{q \cdot l^3}{16 \cdot E \cdot I} \qquad \alpha'' = \frac{q \cdot \left(\frac{l}{2}\right)^3}{6 \cdot E \cdot I} = \frac{q \cdot l^3}{48 \cdot E \cdot I}$$

Risulta pertanto:

$$\alpha = \frac{q \cdot l^3}{16 \cdot E \cdot I} - \frac{q \cdot l^3}{48 \cdot E \cdot I}$$

e semplificando:

$$\alpha = \frac{q \cdot l^3}{24 \cdot E \cdot I} \tag{2}$$

espressione valida anche per calcolare l'angolo β relativo alla sezione appoggiata in *B*.

Pidatella, Ferrari Aggradi, Pidatella, *Corso di meccanica, macchine ed energia* © Zanichelli 2012