

## Cenni sulle travi iperstatiche

### 1 Generalità

Nel primo volume del testo abbiamo trattato l'argomento delle reazioni dei vincoli e della loro determinazione limitatamente alle travi isostatiche, considerate come corpi rigidi e indeformabili; in questa ipotesi, infatti, il problema era ben determinato e facilmente risolvibile in quanto alle tre incognite da calcolare corrispondeva un ugual numero di equazioni.

Lo studio delle travi iperstatiche, che sono soggette a un numero di vincoli semplici superiore ai gradi di libertà del sistema, presenta, nel caso più semplice, quattro incognite da determinare, cosa impossibile se ci si avvale delle tre note equazioni della statica:

$$\sum F_{ix} = 0 \quad \sum F_{iy} = 0 \quad \sum F_i \cdot b_i = 0$$

e se non si tiene conto delle eventuali deformazioni che la struttura subisce per effetto dei carichi esterni. Ciò spiega i motivi che ci hanno costretto a limitare lo studio della statica alle sole travi isostatiche; solo ora – dopo aver valutato gli effetti dell'inflessione delle strutture (freccie e angoli di rotazione) – siamo in condizione di procedere al calcolo delle reazioni e delle caratteristiche di sollecitazione di alcune travi iperstatiche.

► **Il procedimento più usato consiste nel sopprimere i vincoli in soprannumero, sostituendoli con le loro reazioni** (intese come forze agenti sulla struttura) **e imponendo la condizione che il punto di applicazione di tali forze non subisca spostamenti malgrado la presenza dei carichi.** In altre parole, le reazioni incognite devono avere intensità tale da produrre spostamenti uguali e opposti a quelli generati dai carichi in assenza dei relativi vincoli.

Calcolate le reazioni dei vincoli in soprannumero, il problema non si differenzia da quello relativo alle strutture isostatiche; le rimanenti reazioni si calcolano utilizzando le tre equazioni della statica, dopodiché si procede a tracciare i diagrammi del momento flettente e del taglio, valutando contemporaneamente i valori massimi delle due sollecitazioni, valori che serviranno per il dimensionamento o per la verifica di resistenza della struttura.

### 2 Travi con appoggio e incastro

Le travi con appoggio e incastro (FIGURA 1 a pagina seguente) sono una volta iperstatiche; infatti, se i carichi sono comunque orientati, si dispone di tre equazioni, mentre le incognite da determinare sono rispettivamente il momento d'incastro  $M_p$ , le reazioni dell'incastro  $R_y$  e  $R_x$  e la reazione dell'appoggio  $R_a$ . Se i carichi sono

esclusivamente verticali il problema non muta, perché manca la reazione  $R_x$ , ma contemporaneamente si annulla una delle equazioni, non esistendo componenti orizzontali delle forze esterne.

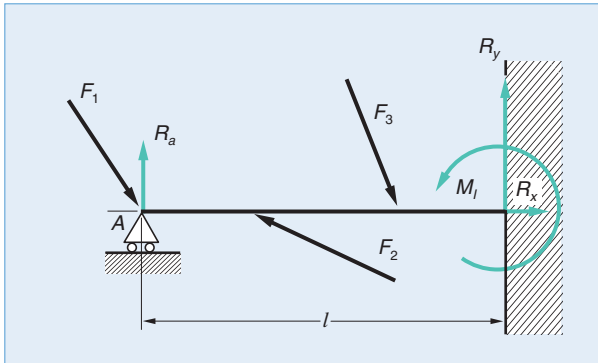
## 2.1 Trave soggetta a un carico uniformemente ripartito

Riferiamoci alla trave di FIGURA 2a e proponiamoci di determinarne tutte le caratteristiche. Per quanto esposto nel paragrafo precedente, si può pensare di sostituire l'appoggio sovrabbondante con la sua reazione incognita  $R_a$ , imponendo la condizione che l'estremo A non subisca abbassamenti, come indicato in FIGURA 2b.

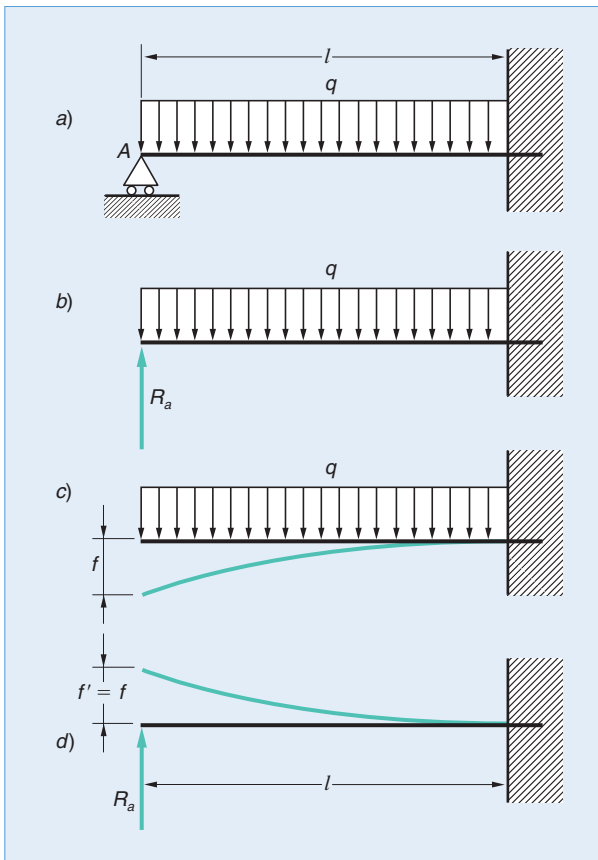
Così facendo, la struttura risulta sottoposta a due diverse condizioni di carico, e precisamente:

- un carico uniformemente ripartito  $q$  su tutta la lunghezza, rivolto verso il basso (FIGURA 2c);
- una forza  $R_a$  concentrata all'estremo libero, rivolta verso l'alto (FIGURA 2d).

► Per soddisfare la **condizione di equilibrio** detta sopra, la forza  $R_a$  deve produrre una freccia  $f'$  di valore assoluto uguale alla freccia  $f$  prodotta dal carico esterno  $q$ .



1 Trave con appoggio e incastro soggetta a carichi generici.



2 Trave con appoggio e incastro soggetta a un carico uniformemente ripartito.

Ricordando le relazioni (8.17) e (8.19) del testo, deve essere:

$$\frac{R_a \cdot l^3}{3 \cdot E \cdot I} = \frac{q \cdot l^4}{8 \cdot E \cdot I}$$

e semplificando:

$$R_a = \frac{3}{8} \cdot q \cdot l \quad (1)$$

ossia, ponendo  $Q = q \cdot l$ :

$$R_a = \frac{3}{8} \cdot Q \quad (2)$$

Determinata la reazione  $R_a$ , si procede come se la trave fosse isostatica. La reazione verticale  $R_y$  dell'incastro vale:

$$R_y = Q - R_a = Q - \frac{3}{8} \cdot Q$$

ossia:

$$R_y = \frac{5}{8} \cdot Q \quad (3)$$

mentre è evidente che  $R_x = 0$ . Il momento d'incastro, che nella figura abbiamo assunto negativo, vale:

$$M_I = R_a \cdot l - Q \cdot \frac{l}{2}$$

da cui, sostituendo l'espressione della reazione  $R_a$ , segue:

$$M_I = -\frac{Q \cdot l}{8} \quad (4)$$

ossia:

$$M_I = -\frac{q \cdot l^2}{8} \quad (5)$$

Si noti che la scelta del vincolo da sopprimere non è rigorosa; il problema si risolve anche sostituendo l'incastro con un appoggio (un vincolo semplice al posto di uno doppio) e aggiungendo un momento incognito  $M_I$  tale da rendere nulla la rotazione della sezione estrema (FIGURA 3). In queste ipotesi, si ottiene **1**:

$$\frac{q \cdot l^3}{24 \cdot E \cdot I} = \frac{M_I \cdot l}{3 \cdot E \cdot I}$$

e semplificando:

$$M_I = -\frac{q \cdot l^2}{8}$$

come avevamo già ricavato.

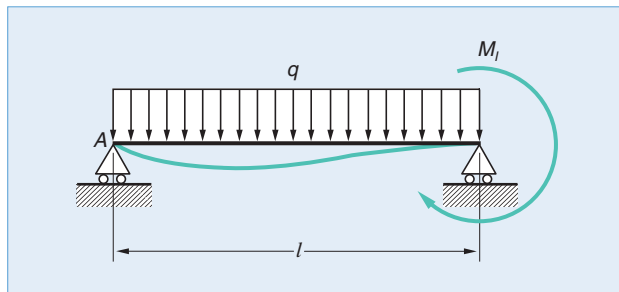
Calcolate le reazioni dei vincoli, lo studio della trave si completa rapidamente tracciando i diagrammi delle sollecitazioni (FIGURA 4): il momento flettente varia con legge parabolica e presenta un massimo negativo (5) all'incastro e un massimo positivo nella sezione in cui si annulla il taglio, che a sua volta varia con legge lineare dall'estremo libero all'incastro.

L'espressione generica del taglio è

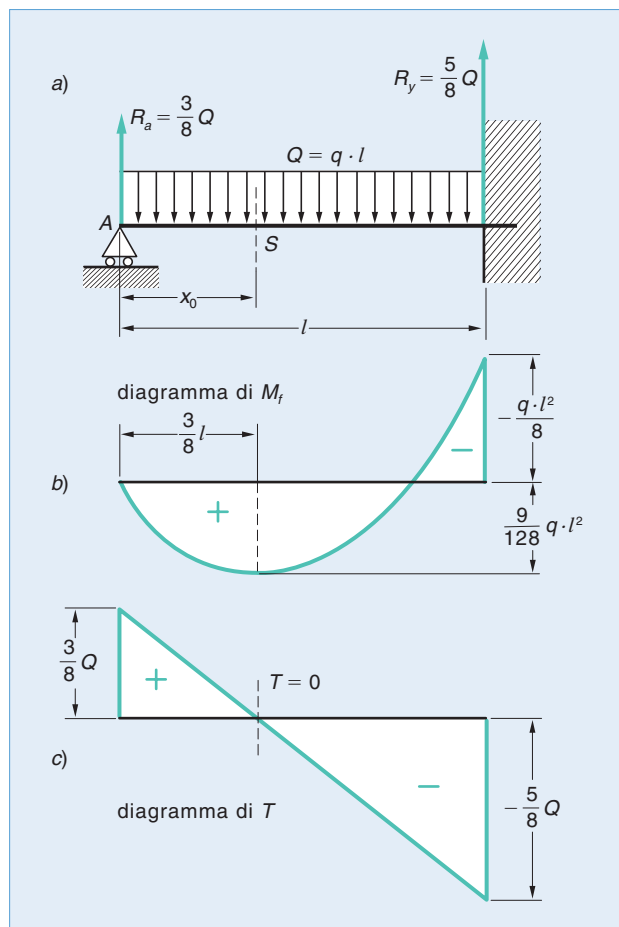
$$T = \frac{3}{8} \cdot q \cdot l - q \cdot x_0$$

Uguagliandola a zero, si ricava l'ascissa  $x_0$  cui corrisponde il massimo momento positivo [ $x_0 = (3/8) l$ ], il cui valore è

$$M_{f \max} = \frac{9}{128} \cdot q \cdot l^2 \quad (6)$$



3 Altro metodo per il calcolo delle reazioni sovrabbondanti.



4 Diagrammi delle sollecitazioni della trave di figura 9.2.

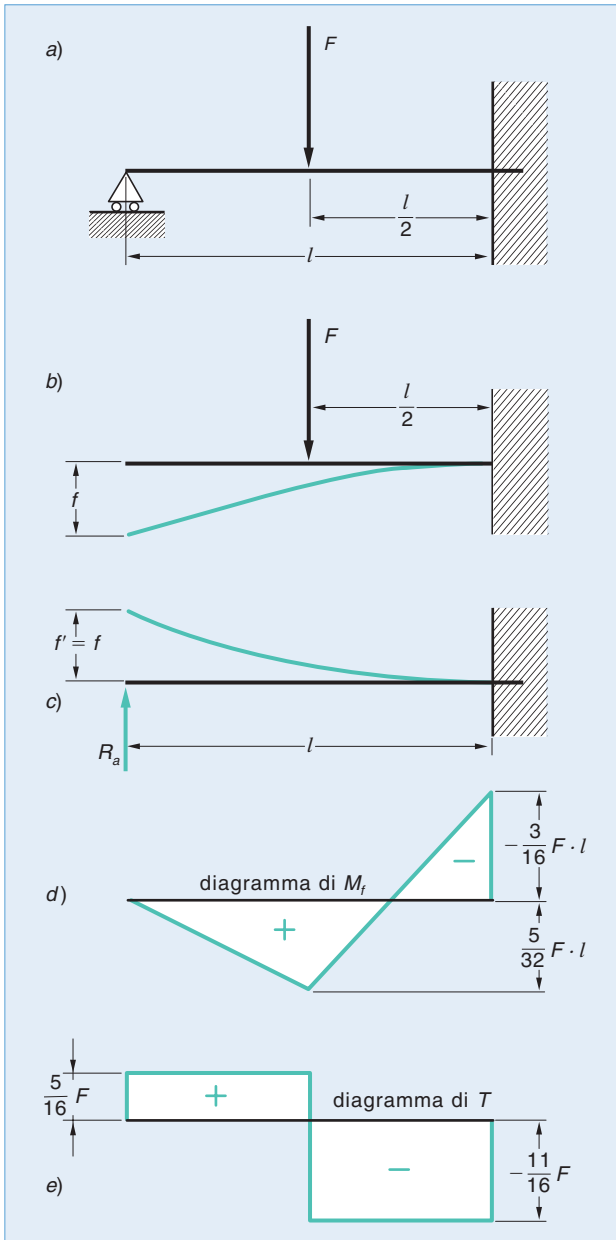
## 2.2 Trave soggetta a un carico concentrato in mezzeria

Se la trave è soggetta a un carico concentrato  $F$  a metà della sua lunghezza (FIGURA 5a a pagina seguente), il procedimento non subisce sostanziali modifiche; si può sopprimere l'appoggio di estremità (sostituendolo con la sua reazione) oppure considerare la trave appoggiata soggetta a un momento agente a uno dei due estremi oltre, beninteso, al carico esterno  $F$ .

Operando secondo la prima ipotesi, la struttura è soggetta a due forze opposte, una delle quali ( $R_a$ ) applicata all'estremo libero e l'altra ( $F$ ) a metà della sua lunghezza (FIGURE 5b e 5c).

Imponendo la condizione che l'estremo libero non subisca alcun abbassamento, e ricordando le relazioni (8.17) e (8.28) del testo, possiamo scrivere:

**1** La formula per il calcolo dell'angolo di rotazione prodotto da un momento agente a un estremo della trave non è stata ricavata nel capitolo 8, ove si trattavano solo i casi più semplici; essa comunque appare negli esercizi relativi al capitolo suddetto.



5 Trave con appoggio e incastro soggetta a un carico concentrato.

$$\frac{R_a \cdot l^3}{3 \cdot E \cdot I} = \frac{5}{48} \cdot \frac{F \cdot l^3}{E \cdot I}$$

da cui, semplificando, segue:

$$R_a = \frac{5}{16} \cdot F \quad (7)$$

Di conseguenza, la reazione verticale dell'incastro  $R_y$  vale:

$$R_y = F - R_a$$

ossia:

$$R_y = F - \frac{5}{16} \cdot F = \frac{11}{16} \cdot F \quad (8)$$

Il momento d'incastro si calcola nel modo consueto:

$$M_I = R_a \cdot l - F \cdot \frac{l}{2}$$

Sostituendo l'espressione di  $R_a$  si ha:

$$M_I = \frac{5}{16} \cdot F \cdot l - F \cdot \frac{l}{2} = -\frac{3}{16} \cdot F \cdot l \quad (9)$$

e risulta negativo, come era logico prevedere.

Il diagramma dei momenti (FIGURA 5d) presenta un massimo negativo  $M_p$  in corrispondenza della sezione d'incastro, e un massimo positivo nella sezione in cui agisce il carico  $F$ ; tale massimo vale:

$$M_{f \max} = R_a \cdot \frac{l}{2} = \frac{5}{16} \cdot F \cdot \frac{l}{2} = \frac{5}{32} \cdot F \cdot l \quad (10)$$

Il diagramma del taglio ha il consueto andamento a gradini come illustrato in FIGURA 5e.

### 3 Travi doppiamente incastrate

Se i carichi sono esclusivamente verticali, queste travi sono due volte iperstatiche; si dispone infatti di due sole equazioni:

$$\sum F_{iy} = 0 \quad \sum F_i \cdot b_i = 0$$

mentre le incognite del problema sono quattro, dovendosi determinare i due momenti d'incastro e le due reazioni verticali. Ci limiteremo perciò a esaminare solo i casi più semplici.

### 3.1 Trave soggetta a un carico uniformemente distribuito

Se il carico  $q$  è distribuito su tutta la lunghezza della trave (FIGURA 6a), la struttura assume un particolare carattere di simmetria che facilita notevolmente il problema. Infatti le due reazioni verticali sono uguali e valgono rispettivamente:

$$R_y = R'_y = \frac{q \cdot l}{2}$$

Essendo uguali anche i due momenti d'incastro, è sufficiente calcolarne uno solo per poter concludere rapidamente lo studio della trave.

Per rimanere nel caso più generale, supporremo che, pur essendo caricata tutta la trave, le reazioni verticali siano incognite, e applicheremo il procedimento già illustrato per le travi con appoggio e incastro. **È chiaro che, in queste ipotesi, dovremo sopprimere due vincoli semplici, sostituendoli con le relative reazioni.** Eliminiamo pertanto uno dei due incastri, riducendo la struttura a una comune mensola, al cui estremo dovremo applicare una reazione verticale  $R'_y$  e un momento  $M'_y$  in sostituzione dell'incastro soppresso (FIGURA 6b).

- Questa volta, però, le condizioni da imporre sono due, e precisamente:
- l'estremo libero non si deve abbassare ( $f=0$ );
  - l'estremo libero non deve ruotare ( $\alpha=0$ ).

Per quanto riguarda la prima condizione, ricordando le relazioni (8.19), (8.17) e (8.11) del testo, possiamo scrivere:

$$\frac{q \cdot l^4}{8 \cdot E \cdot I} - \frac{R'_y \cdot l^3}{3 \cdot E \cdot I} + \frac{M'_y \cdot l^2}{2 \cdot E \cdot I} = 0 \quad (11)$$

e per la seconda condizione:

$$\frac{q \cdot l^3}{6 \cdot E \cdot I} - \frac{R'_y \cdot l^2}{2 \cdot E \cdot I} + \frac{M'_y \cdot l}{E \cdot I} = 0 \quad (12)$$

Risolvendo il sistema formato dalle (11) e (12), si ricavano i valori delle due incognite  $R'_y$  e  $M'_y$ . Dalla (12) si ottiene:

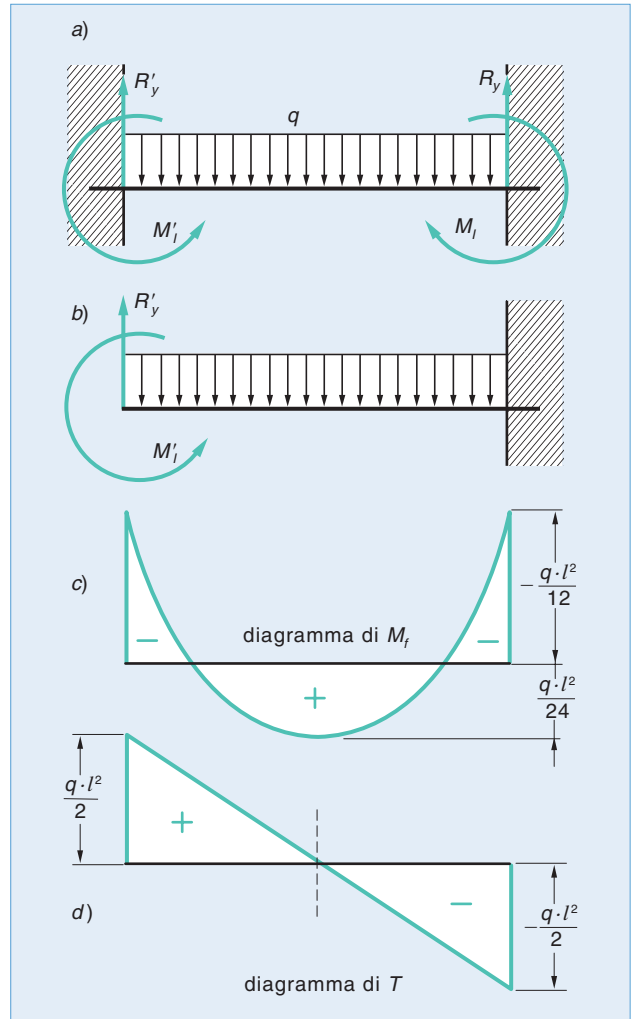
$$\frac{M'_y \cdot l}{E \cdot I} = \frac{R'_y \cdot l^2}{2 \cdot E \cdot I} - \frac{q \cdot l^3}{6 \cdot E \cdot I}$$

e, sostituendo tale espressione nella (11):

$$\frac{q \cdot l^4}{8 \cdot E \cdot I} - \frac{R'_y \cdot l^3}{3 \cdot E \cdot I} + \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{R'_y \cdot l^2}{2 \cdot E \cdot I} - \frac{q \cdot l^3}{6 \cdot E \cdot I} \right) \cdot l = 0$$

da cui segue, sviluppando il calcolo:

$$\frac{q \cdot l^4}{24 \cdot E \cdot I} - \frac{R'_y \cdot l^3}{12 \cdot E \cdot I} = 0$$



6 Trave doppiamente incastrata soggetta a un carico uniformemente ripartito.

e, semplificando:

$$R'_y = \frac{q \cdot l}{2} = R_y \quad (13)$$

Sostituendo tale valore nella (12):

$$\frac{q \cdot l^3}{6 \cdot E \cdot I} - \frac{q \cdot l^3}{4 \cdot E \cdot I} + \frac{M'_I \cdot l}{E \cdot I} = 0$$

si ottiene immediatamente:

$$M'_I = \frac{q \cdot l^2}{12} = M_I \quad (14)$$

di segno positivo, in accordo con il senso di rotazione riportato in figura.

Calcolato il valore dei momenti d'incastro, i diagrammi delle sollecitazioni si tracciano facilmente; in una generica sezione  $S$  distante  $x$  dall'incastro di sinistra, il momento flettente è espresso da:

$$M_f = -M'_I + R'_y \cdot x - \frac{q \cdot x^2}{2}$$

ossia, ricordando la (13) e la (14):

$$M_f = -\frac{q \cdot l^2}{12} + \frac{q \cdot l}{2} \cdot x - \frac{q \cdot x^2}{2}$$

Il diagramma ha andamento parabolico, come indicato in FIGURA 6c, e presenta un massimo positivo in mezzeria ( $x = l/2$ ):

$$M_{f \max} = -\frac{q \cdot l^2}{12} + \frac{q \cdot l}{2} \cdot \frac{l}{2} - \frac{q \cdot (l/2)^2}{2}$$

che, a calcoli fatti, diventa:

$$M_{f \max} = \frac{q \cdot l^2}{24} \quad (15)$$

cioè pari alla metà del momento d'incastro:

$$M_{f \max} = \frac{1}{2} \cdot M_I$$

È bene sottolineare che il diagramma del momento flettente si può ottenere anche sfruttando il principio della sovrapposizione degli effetti; infatti la struttura in esame può essere frazionata in due diverse ipotesi di carico:

- una trave su due appoggi soggetta a un carico ripartito; il suo diagramma è parabolico con un massimo positivo in mezzeria:

$$M'_{f \max} = \frac{q \cdot l^2}{8}$$

- una trave appoggiata soggetta a due momenti negativi uguali; il relativo diagramma è un rettangolo di altezza:

$$M''_{f \max} = M_I = \frac{q \cdot l^2}{12}$$

Eseguendo la differenza delle ordinate:

$$M_{f \max} = M'_{f \max} - M_I$$

si ottiene:

$$M_{f \max} = \frac{q \cdot l^2}{8} - \frac{q \cdot l^2}{12} = \frac{q \cdot l^2}{24}$$

valore coincidente con quello espresso dalla (15).

Il diagramma degli sforzi di taglio, illustrato in FIGURA 6d, ha inizio con un'ordinata uguale al valore della reazione  $R_y$ , poi decresce con legge lineare annullandosi in mezzeria; in definitiva, esso coincide con quello di una trave appoggiata soggetta all'identica condizione di carico. Anche la freccia d'inflexione si può determinare applicando il principio della sovrapposizione degli effetti; con le stesse ipotesi assunte in precedenza, si ha:  $f = f' - f''$ , in cui  $f'$  rappresenta la freccia prodotta dal carico ripartito e  $f''$  quella (negativa) dovuta ai due momenti d'incastro. Ricordando le relative espressioni, si ottiene:

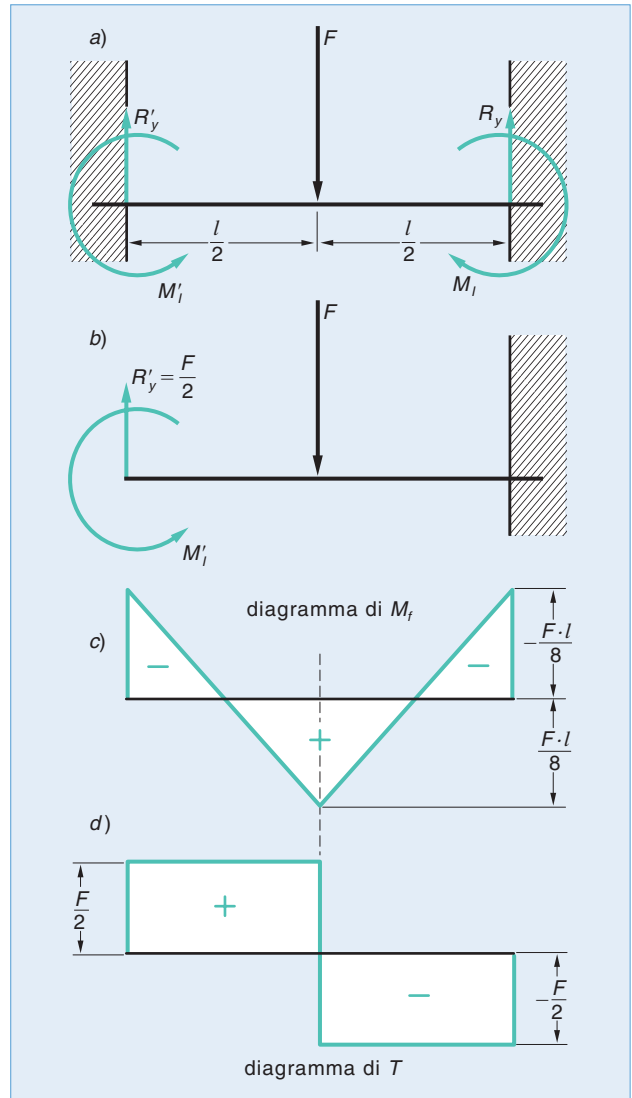
$$f = \frac{5}{384} \cdot \frac{q \cdot l^4}{E \cdot I} - \frac{M_I \cdot l^2}{8 \cdot E \cdot I}$$

e, sostituendo il valore (14) di  $M_I$ :

$$f = \frac{5}{384} \cdot \frac{q \cdot l^4}{E \cdot I} - \left( \frac{q \cdot l^2}{12} \right) \cdot \frac{l^2}{8 \cdot E \cdot I}$$

Si perviene infine alla relazione:

$$f = \frac{1}{384} \cdot \frac{q \cdot l^4}{E \cdot I} \quad (16)$$



7 Trave doppiamente incastrata soggetta a un carico concentrato in mezzeria.

### 3.2 Trave soggetta a un carico concentrato in mezzeria

Per questa condizione di carico si può ripetere quanto esposto a proposito del carico uniformemente ripartito. Data l'evidente simmetria della struttura FIGURA 7a, le reazioni orizzontali sono nulle e quelle verticali valgono:

$$R_y = R'_y = \frac{F}{2}$$

per cui rimangono da determinare i due momenti d'incastro, peraltro uguali:

$$M_I = M'_I$$

► Eliminando uno dei due incastri e sostituendolo con le rispettive reazioni, la struttura assume l'aspetto di FIGURA 7b. Come già fatto in precedenza, si impone la condizione che l'estremo libero non subisca abbassamento ( $f = 0$ ) né rotazione ( $\alpha = 0$ ) rispetto alla configurazione iniziale.

Perché sia nulla la freccia, deve essere:

$$\frac{5}{48} \cdot \frac{F \cdot l^3}{E \cdot I} - \frac{R'_y \cdot l^3}{3 \cdot E \cdot I} - \frac{M'_I \cdot l^2}{2 \cdot E \cdot I} = 0$$

Ponendo in questa equazione  $R'_y = F/2$ , si ottiene:

$$\frac{5}{48} \cdot \frac{F \cdot l^3}{E \cdot I} - \frac{F \cdot l^3}{6 \cdot E \cdot I} - \frac{M'_I \cdot l^2}{2 \cdot E \cdot I} = 0$$

e semplificando:

$$-\frac{F \cdot l^3}{16 \cdot E \cdot I} = \frac{M'_I \cdot l^2}{2 \cdot E \cdot I}$$

Risolvendo rispetto all'incognita  $M'_I$  risulta:

$$M'_I = -\frac{F \cdot l}{8} \quad (17)$$

Lo stesso risultato si ottiene imponendo la condizione che l'estremo libero non subisca alcuna rotazione; la relativa equazione:

$$\frac{F \cdot l^2}{8 \cdot E \cdot I} - \frac{R'_y \cdot l^2}{2 \cdot E \cdot I} - \frac{M'_I \cdot l}{E \cdot I} = 0$$

si risolve sostituendo l'espressione della reazione verticale  $R'_y$ .

Determinate le reazioni dei vincoli, lo studio della struttura si completa con i consueti diagrammi; il momento flettente varia con legge lineare, decrescendo progressivamente dal valore iniziale (17), che si verifica nella sezione d'incastro, fino ad assumere valori positivi. In una sezione  $S$  distante  $x$  dall'incastro citato, il momento flettente è dato da  $M_f = -M'_I + R'_y \cdot x$ , ossia:

$$M_f = -\frac{F \cdot l}{8} + \frac{F}{2} \cdot x \quad (18)$$

da cui segue:

$$M_{f \max} = -\frac{F \cdot l}{8} + \frac{F \cdot l}{4} = \frac{F \cdot l}{8} \quad (19)$$

Quindi i massimi, positivo e negativo, hanno lo stesso valore assoluto, e il diagramma assume la conformazione di FIGURA 7c. Il diagramma degli sforzi di taglio non si differenzia da quello di una trave appoggiata, come illustrato in FIGURA 7d; esso ha inizio con un'ordinata positiva pari alla reazione  $R'_y$ , prosegue costante fino alla mezzeria, ove inverte il segno, in accordo con la presenza di una punta di massimo momento flettente, e si conclude all'estremo opposto con intensità uguale a  $R'_y$ .

## 4 Travi su tre appoggi

Una trave soggetta a carichi normali al suo asse geometrico e vincolata con tre appoggi semplici è una volta iperstatica; nel caso più generale di  $n$  appoggi, la struttura è tante volte iperstatica quanti sono gli appoggi meno due (trave continua) e il calcolo delle reazioni sovrabbondanti si presenta ancora più laborioso.

Ci limiteremo perciò a un breve cenno sulle travi munite di tre appoggi, considerando solo le ipotesi di carico più semplici.



## 4.1 Trave soggetta a un carico uniformemente ripartito

La struttura è composta da due campate uguali, ciascuna di lunghezza  $l$  (FIGURA 8a), ed è soggetta a un carico  $q$  per unità di lunghezza. Per il calcolo delle reazioni dei tre appoggi, disponiamo di due sole equazioni, essendo automaticamente nulla la sommatoria delle componenti orizzontali.

► Eliminiamo pertanto l'appoggio centrale  $C$ , sostituendolo con la sua reazione incognita  $R_c$ . È chiaro che la struttura non deve presentare il minimo abbassamento nel punto  $C$ , per cui la freccia  $f'$  prodotta dal carico distribuito e la freccia  $f''$  sviluppata dalla reazione  $R_c$  devono essere uguali (FIGURE 8b e 8c):  $f' = f''$ .

Per il calcolo della freccia  $f'$ , riprendiamo la formula (8.25) del testo:

$$f' = \frac{5}{384} \cdot \frac{q \cdot l^4}{E \cdot I}$$

che nel caso in esame diventa:

$$f' = \frac{5}{384} \cdot \frac{q \cdot (2 \cdot l)^4}{E \cdot I} = \frac{5 \cdot 16}{384} \cdot \frac{q \cdot l^4}{E \cdot I} \quad (20)$$

La freccia  $f''$  prodotta dalla reazione  $R_c$ , si esprime con la relazione (8.23) del testo che, applicata alla struttura di lunghezza doppia, diventa:

$$f'' = \frac{R_c \cdot (2 \cdot l)^3}{48 \cdot E \cdot I} = \frac{8}{48} \cdot \frac{R_c \cdot l^3}{E \cdot I} \quad (21)$$

Uguagliando la (20) e la (21):

$$\frac{5 \cdot 16}{384} \cdot \frac{q \cdot l^4}{E \cdot I} = \frac{8}{48} \cdot \frac{R_c \cdot l^3}{E \cdot I}$$

dopo le opportune semplificazioni, si ottiene:

$$R_c = \frac{5}{4} \cdot q \cdot l \quad (22)$$

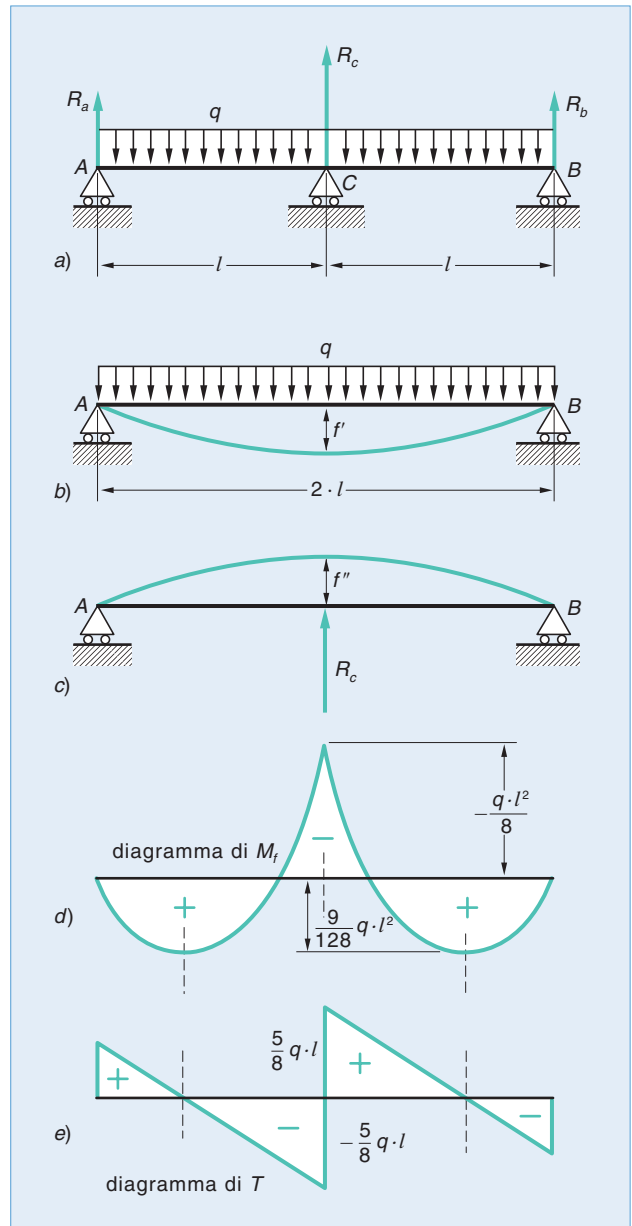
Poiché il carico totale agente sulla struttura è  $Q = 2 \cdot q \cdot l$ , data l'evidente simmetria, le reazioni degli appoggi di estremità valgono:

$$R_a = R_b = \frac{1}{2} \cdot \left( 2 \cdot q \cdot l - \frac{5}{4} \cdot q \cdot l \right) = \frac{3}{8} \cdot q \cdot l \quad (23)$$

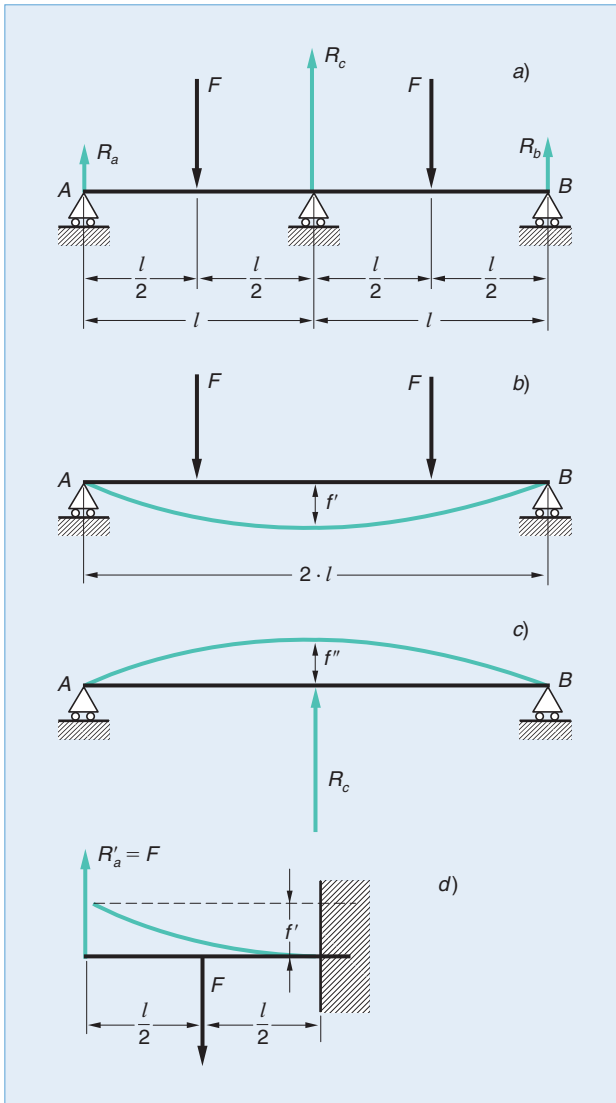
Il momento flettente varia con legge parabolica, come sempre accade quando il carico è uniformemente ripartito (FIGURA 8d); esso presenta un massimo negativo in corrispondenza dell'appoggio centrale e due massimi positivi uguali (per motivi di simmetria) nelle due campate adiacenti. Poiché tali massimi relativi non si manifestano nelle mezzerie delle campate, è necessario ricorrere all'espressione generica del taglio e uguagliarla a zero:

$$T = R_a - q \cdot x_0 = 0$$

per calcolare l'ascissa  $x_0$  della sezione sottoposta al



8 Trave su tre appoggi con carico ripartito uniformemente.



9 Trave su tre appoggi con carichi concentrati a metà campata.

massimo momento flettente positivo. Senza dilungarci in un procedimento ormai ben noto, si rileva che è

$$M_f = \frac{9}{128} \cdot q \cdot l^2 \quad (24)$$

Il massimo negativo, in corrispondenza dell'appoggio centrale, si calcola con il metodo tradizionale:

$$M_{f(c)} = R_a \cdot l - \frac{q \cdot l^2}{2}$$

da cui segue, sostituendo l'espressione (23) della reazione  $R_a$ :

$$M_{f(c)} = \frac{3}{8} \cdot q \cdot l^2 - \frac{q \cdot l^2}{2}$$

e in definitiva:

$$M_{f(c)} = -\frac{1}{8} \cdot q \cdot l^2 \quad (25)$$

superiore, in valore assoluto, al massimo positivo. Ne segue che il dimensionamento della trave verrà eseguito tenendo conto della sollecitazione (25).

Il diagramma del taglio (FIGURA 8e) varia con legge lineare; sull'appoggio di sinistra è

$$T_a = R_a = \frac{3}{8} \cdot q \cdot l$$

poi decresce fino ad annullarsi nella sezione distante  $x_0$  dall'appoggio stesso. In corrispondenza del vincolo intermedio lo sforzo di taglio assume i valori:

$$T'_c = R_a - q \cdot l = \frac{3}{8} \cdot q \cdot l - q \cdot l = -\frac{5}{8} \cdot q \cdot l$$

$$T''_c = R_a - q \cdot l + R_c = \frac{3}{8} \cdot q \cdot l - q \cdot l + \frac{5}{4} \cdot q \cdot l = \frac{5}{8} \cdot q \cdot l$$

e il diagramma si completa in modo analogo nella seconda campata.

## 4.2 Trave soggetta a carichi concentrati in mezzeria

La struttura è rappresentata in FIGURA 9a; per maggior semplicità supporremo che i carichi concentrati nelle mezzerie delle due campate, lunghe  $l$ , siano uguali. In questa ipotesi la struttura è simmetrica e il procedimento per il calcolo della reazione sovrabbondante  $R_c$  si imposta in modo analogo a quello adottato per i carichi distribuiti.

Eliminiamo perciò l'appoggio intermedio  $C$  sostituendolo con la sua reazione incognita; così facendo, la struttura si decompone secondo gli schemi delle FIGURE 9b e 9c.

La freccia  $f''$  dovuta alla reazione  $R_c$  è stata già calcolata in precedenza:

$$f'' = \frac{8}{48} \cdot \frac{R_c \cdot l^3}{E \cdot I} \quad (26)$$

mentre la freccia  $f'$  prodotta dai due carichi concentrati  $F$  deve essere ricavata mediante il principio della sovrapposizione degli effetti. A tale scopo osserviamo che essa è identica a quella che si manifesta su metà della trave, considerata incastrata in  $C$  e soggetta ai due carichi,  $F$  e  $R'_a$ , uguali e di verso opposto (FIGURA 9d). Per quanto riguarda il carico di estremità  $R'_a$ , è noto che la freccia a esso dovuta vale:

$$f_a = \frac{R'_a \cdot l^3}{3 \cdot E \cdot I} = \frac{F \cdot l^3}{3 \cdot E \cdot I}$$

mentre per il carico  $F$  agente a metà lunghezza della mensola, avevamo trovato nel paragrafo 5 del capitolo 8:

$$f_f = \frac{5}{48} \cdot \frac{F \cdot l^3}{E \cdot I}$$

Poiché le due forze hanno verso opposto, si ha:

$$f' = f_a - f_f = \frac{F \cdot l^3}{3 \cdot E \cdot I} - \frac{5}{48} \cdot \frac{F \cdot l^3}{E \cdot I}$$

Eseguendo i calcoli, si ottiene l'espressione della freccia relativa alla trave di FIGURA 9b:

$$f' = \frac{11}{48} \cdot \frac{F \cdot l^3}{E \cdot I} \quad (27)$$

Uguagliando la (26) e la (27):

$$\frac{8}{48} \cdot \frac{R_c \cdot l^3}{E \cdot I} = \frac{11}{48} \cdot \frac{F \cdot l^3}{E \cdot I}$$

e semplificando, si perviene alla relazione:

$$R_c = \frac{11}{8} \cdot F \quad (28)$$

Le reazioni degli appoggi di estremità valgono pertanto:

$$R_a = R_b = \frac{1}{2} \cdot \left( 2 \cdot F - \frac{11}{8} \cdot F \right) = \frac{5}{16} \cdot F \quad (29)$$

I diagrammi delle sollecitazioni sono riportati in FIGURA 10:

- momento flettente massimo positivo:

$$M_f = R_a \cdot \frac{l}{2} = \frac{5}{16} \cdot F \cdot \frac{l}{2} = \frac{5}{32} \cdot F \cdot l \quad (30)$$

- momento flettente massimo negativo:

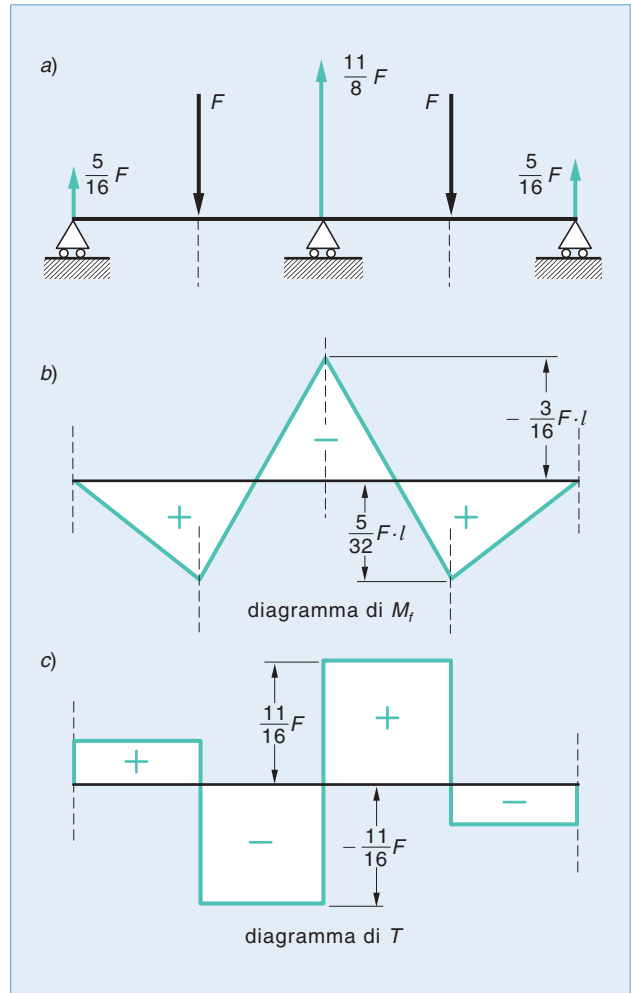
$$M_{f_{\max}} = R_a \cdot l - F \cdot \frac{l}{2} = \frac{5}{16} \cdot F \cdot l - \frac{1}{2} \cdot F \cdot l = -\frac{3}{16} \cdot F \cdot l \quad (31)$$

- sforzo di taglio sull'appoggio A:

$$T_a = R_a = \frac{5}{16} \cdot F$$

- sforzo di taglio nella sezione in cui agisce il carico  $F$ :

$$T_1 = R_a - F = \frac{5}{16} \cdot F - F = -\frac{11}{16} \cdot F$$



10 Diagrammi delle sollecitazioni relativi alla trave di figura 9.

- sforzi di taglio in corrispondenza dell'appoggio centrale:

$$T'_c = -\frac{11}{16} \cdot F$$

$$T''_c = R_a - F + R_c = \frac{5}{16} \cdot F - F + \frac{11}{8} \cdot F = \frac{11}{16} \cdot F$$

Calcolate le reazioni e le caratteristiche di sollecitazione, il problema si conclude con il dimensionamento (o la verifica) della struttura.

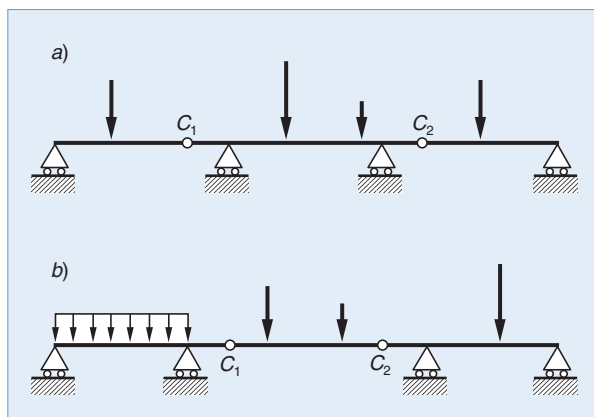
## 5 Travi Gerber

Le travi Gerber sono travi su più appoggi, rese isostatiche da un numero di cerniere pari a quello dei vincoli sovrabbondanti; di conseguenza una trave di questo tipo su quattro appoggi è corredata da due cerniere disposte secondo gli schemi delle FIGURE 11a e 11b.

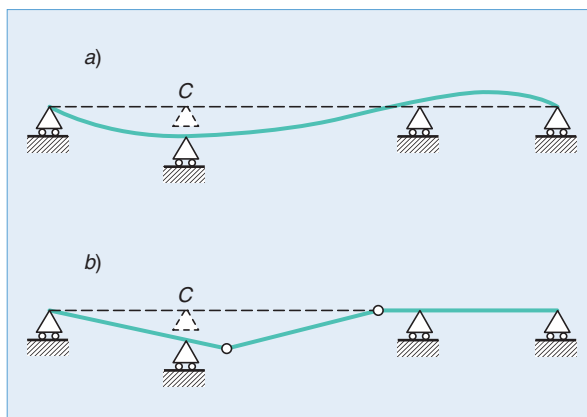
Rispetto alle travi continue – staticamente indeterminate – le travi Gerber presentano il vantaggio non indifferente di non risentire gli effetti di eventuali cedimenti degli appoggi, come è facile rilevare dalla FIGURA 12: la trave continua, per effetto del cedimento dell'appoggio C, subisce una notevole deformazione che ne altera sensibilmente il regime statico, mentre la trave Gerber «accompagna» il cedimento ruotando intorno alle due cerniere e mantenendo rettilinei i vari tronconi.

Trattandosi di strutture isostatiche, lo studio delle travi Gerber avrebbe dovuto trovare la sua più logica collocazione nei capitoli precedenti, o addirittura, almeno per quanto concerne la ricerca delle reazioni, nel primo volume del testo; abbiamo ritenuto più opportuno invece inserirle adesso, considerandole come un'evoluzione delle travi su più appoggi. Il calcolo delle reazioni dei vincoli in una trave Gerber può essere impostato in diversi modi.

1. Impiegando le equazioni fondamentali della statica e aggiungendo tante equazioni ausiliarie quante sono le cerniere presenti nella struttura; ogni equazione ausiliaria esprime l'annullarsi della sommatoria dei momenti delle forze esterne e delle reazioni dei vincoli rispetto alla cerniera stessa. Preferiamo non insistere su questo metodo che comporta un sistema di equazioni tanto più complesso quanto più numerosi sono i vincoli sovrabbondanti; la soluzione del problema è laboriosa, ed è preferibile perciò ricorrere ad altri metodi di calcolo.



11 Travi Gerber.



12 Effetti prodotti dal cedimento di un appoggio su una trave continua (a) e su una trave Gerber (b).

2. Frazionando la struttura in un certo numero di travi semplici; a tale scopo, si eliminano le cerniere sostituendole con le reazioni mutue che le due parti della struttura si trasmettono attraverso l'articolazione soppressa.

### ESEMPIO

Un esempio servirà a chiarire meglio il concetto. Consideriamo la trave di FIGURA 13a, soggetta a un carico uniformemente ripartito su parte della campata laterale destra e a un carico concentrato  $F$  agente in un punto della campata laterale sinistra, mentre quella di centro è scarica. Scomponiamo la struttura secondo lo schema di FIGURA 13b, ottenendo tre travi più semplici, in ciascuna delle quali figurano, oltre i carichi, le reazioni mutue  $R_{c1}$  e  $R_{c2}$  trasmesse dalla cerniera. Per la campata sinistra, dalla condizione di equilibrio intorno al punto A:

$$\sum F_i \cdot b_i = F \cdot a - R_{c1} \cdot l_1 = 0$$

si ottiene:

$$R_{c1} = \frac{F \cdot a}{l_1}$$

e di conseguenza:

$$R_a = \frac{F \cdot b}{l_1}$$

La reazione  $R_{c1}$  si trasmette, con verso opposto, alla campata centrale, che è scarica. Essendo incognite le reazioni degli appoggi ( $R_{a1}$  e  $R_{a2}$ ) e la reazione mutua  $R_{c2}$  trasmessa dalla seconda cerniera, è preferibile considerare prima l'equilibrio della campata destra. Per evidenti motivi di simmetria è

$$R_{c2} = R_b = \frac{q \cdot l_2}{2}$$

per cui, calcolata la  $R_{c2}$ , è facile concludere il procedimento passando al tratto centrale in cui figurano due

termini noti ( $R_{c1}$  e  $R_{c2}$ ) e due incognite ( $R_{a1}$  e  $R_{b1}$ ). Per l'equilibrio alla rotazione intorno al punto  $B_1$ :

$$\sum F_i \cdot b_i = R_{c1} \cdot (\lambda + l) - R_{a1} \cdot l - R_{c2} \cdot \lambda = 0$$

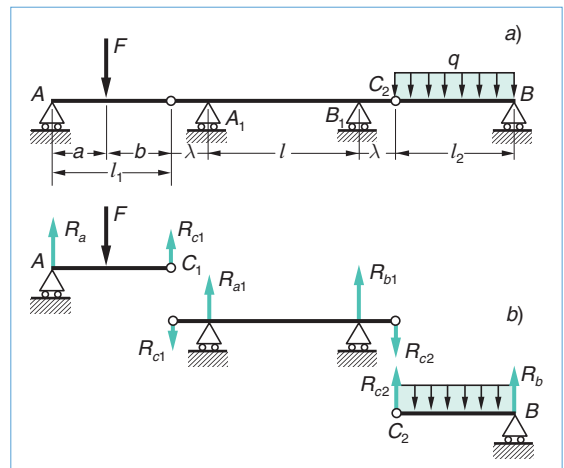
si ottiene:

$$R_{a1} = \frac{R_{c1} \cdot (\lambda + l) - R_{c2} \cdot \lambda}{l}$$

In modo analogo risulta:

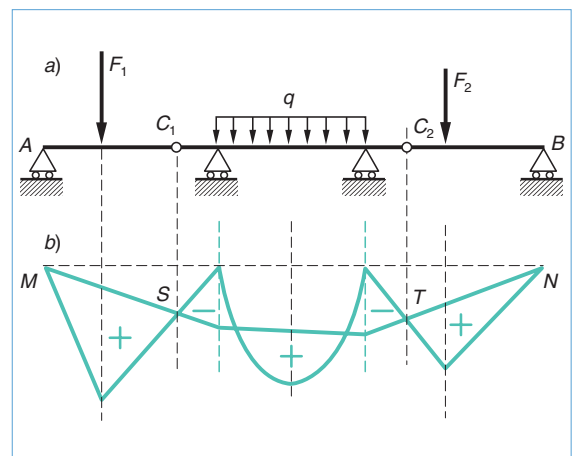
$$R_{b1} = \frac{R_{c2} \cdot (\lambda + l) - R_{c1} \cdot \lambda}{l}$$

Il calcolo delle reazioni dei vincoli è quindi completato. Successivamente si tracceranno i diagrammi del momento flettente e del taglio seguendo le normali regole enunciate nel capitolo 7.



13 Calcolo delle reazioni in una trave Gerber.

3. Un altro metodo per lo studio delle travi Gerber sfrutta la conoscenza del momento flettente e la circostanza che, in queste strutture, esso si annulla in corrispondenza delle cerniere. Il procedimento è rapidissimo, anche se presenta i consueti inconvenienti di tutte le rappresentazioni grafiche. Le varie campate della trave di FIGURA 14a, considerate separatamente, danno luogo a due diagrammi triangolari (carichi concentrati) e a un diagramma parabolico (carico uniformemente ripartito). Tracciati perciò i tre diagrammi suddetti riferiti all'orizzontale MN (FIGURA 14b), si abbassano le verticali dalle due cerniere, individuando i punti S e T di momento nullo; successivamente, congiunto M con S e N con T, si determina la vera linea fondamentale (M-S-T-N) del diagramma complessivo dei momenti. Il diagramma definitivo si ottiene riferendo le singole ordinate a una nuova linea orizzontale.



14 Diagramma del momento flettente relativo a una trave Gerber

## 1 ESERCIZIO SVOLTO

**Argomento** Trave con appoggio e incastro

Studiare la trave con appoggio e incastro schematizzata in FIGURA 15a.

- La struttura è una volta iperstatica, in quanto oltre alla reazione dell'appoggio  $R_a$  si devono calcolare la reazione verticale  $R_y$  dell'incastro e il relativo momento. D'altra parte le equazioni fondamentali della statica si riducono a due, essendo automaticamente soddisfatta la condizione:

$$\sum F_{ix} = 0$$

in quanto il carico è verticale. Eliminando l'appoggio A e sostituendolo con la sua reazione incognita  $R_a$  deve essere:

$$\frac{R_a \cdot l^3}{3 \cdot E \cdot I} = \frac{q \cdot l^4}{8 \cdot E \cdot I}$$

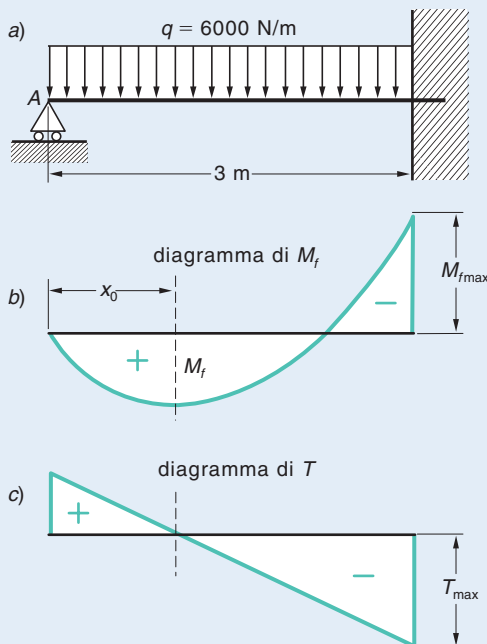
poiché tale reazione deve annullare la freccia prodotta dal carico. Si ricava pertanto:

$$R_a = \frac{3}{8} \cdot q \cdot l = \frac{3}{8} \cdot 6000 \cdot 3 = 6750 \text{ N}$$

Di conseguenza risulta:

$$R_y = q \cdot l - R_a = 6000 \cdot 3 - 6750 = 11250 \text{ N}$$

e il momento d'incastro vale:



15

$$M_i = R_a \cdot l - q \cdot \frac{l^2}{2} = 6750 \cdot 3 - 6000 \cdot \frac{3^2}{2} = -6750 \text{ N} \cdot \text{m}$$

La trave però è soggetta anche a un momento flettente positivo; il suo valore massimo si ha nella sezione in cui si annulla lo sforzo di taglio. Impostata perciò la relazione:

$$T = R_a - q \cdot x_0 = 0$$

si ricava:

$$x_0 = \frac{R_a}{q} = \frac{6750}{6000} = 1,125 \text{ m}$$

Pertanto:

$$M_f = R_a \cdot x_0 - q \cdot \frac{x_0^2}{2} = 6750 \cdot 1,125 - 6000 \cdot \frac{1,125^2}{2} \cong \cong 3797 \text{ N} \cdot \text{m}$$

è il momento massimo positivo, inferiore però a quello (negativo) che si manifesta nella sezione d'incastro (FIGURA 15b).

L'eventuale dimensionamento della trave deve essere eseguito perciò valutando:

$$M_{fmax} = 6750000 \text{ N} \cdot \text{mm}$$

supponendo che sia  $\sigma_{am} = 140 \text{ N/mm}^2$  si ottiene:

$$W_f = \frac{6750000}{140} \cong 48200 \text{ mm}^3$$

Quindi si può impiegare (v. tabelle) un «doppio T» IPE 120, cui corrisponde  $W_f = 53000 \text{ mm}^3$ , con un ampio margine di sicurezza.

Il diagramma del taglio ha inizio con l'ordinata

$$T_a = R_a = 6750 \text{ N}$$

e decresce linearmente fino ad annullarsi nella sezione distante 1,125 m dall'appoggio. Successivamente prosegue nel campo negativo con la stessa inclinazione e si conclude con

$$T_a = -R_y = -11250 \text{ N}$$

valore che costituisce il massimo della sollecitazione.

### ESERCIZI PROPOSTI

- 1.a** ▲▲▲ Studiare la trave con appoggio e incastro schematizzata in FIGURA 16a.

**Soluzione:**  $R_a = 3125 \text{ N}$ ;  $R_y = 6875 \text{ N}$ ;  $M_f = 6250 \text{ N} \cdot \text{m}$ ;

$M_i = -7500 \text{ N} \cdot \text{m}$ .

- 1.b** ▲▲▲ Calcolare le reazioni dei vincoli della trave illustrata in FIGURA 17a e tracciare il diagramma del momento flettente.

**Soluzione:**  $R_a = 9600 \text{ N}$ ;  $R_y = 3600 \text{ N}$ ;  $M_i = 3600 \text{ N} \cdot \text{m}$ .

## 2 ESERCIZIO SVOLTO

**Argomento** Trave con appoggio e incastro

La trave dell'esercizio 1 è sostenuta al suo estremo da un filo metallico ( $\varnothing = 1$  cm) lungo 4 m, anziché dal solito appoggio. Calcolare lo sforzo  $S$  sopportato dal filo e l'abbassamento dell'estremità della trave.

- L'estremità della trave può abbassarsi di una certa quantità  $\lambda$  pari all'allungamento elastico subito dal filo; poiché il filo sostituisce l'appoggio, la condizione di equilibrio si esprime con la relazione:

$$\frac{q \cdot l^4}{8 \cdot E \cdot I} - \frac{R_a \cdot l^3}{3 \cdot E \cdot I} = \frac{R_a \cdot l_1}{E \cdot A}$$

avendo indicato con  $l_1$  la lunghezza del filo e con  $A$  l'area della sua sezione retta. Da tale condizione si ricava:

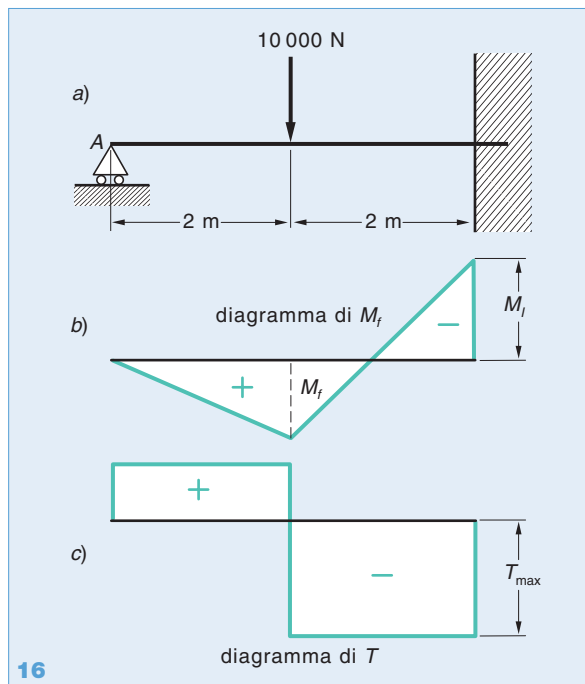
$$R_a \left( \frac{l^3}{3 \cdot E \cdot I} + \frac{l_1}{E \cdot A} \right) = \frac{q \cdot l^4}{8 \cdot E \cdot I}$$

da cui segue:

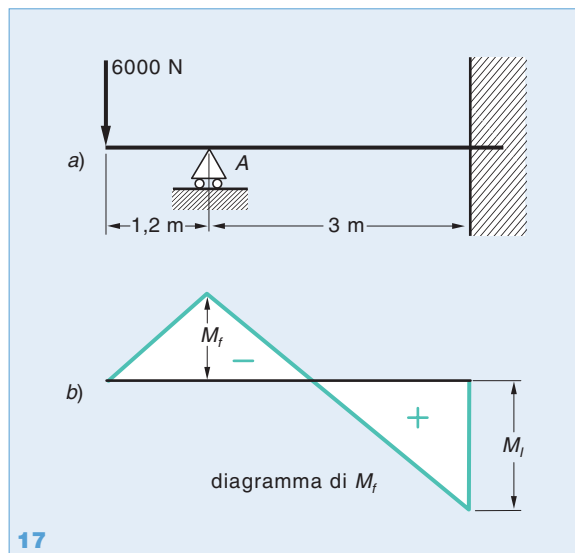
$$R_a = \frac{\frac{q \cdot l^4}{8 \cdot I}}{\left( \frac{l^3}{3 \cdot I} + \frac{l_1}{A} \right)}$$

Passando ai valori numerici, essendo  $q = 6$  N/mm

$$A = \pi \cdot \frac{10^2}{4} = 78,5 \text{ mm}^2$$



16



17

e avendo ricavato dalle tabelle  $I = 3\,180\,000$  mm<sup>4</sup>, risulta:

$$R_a = \frac{\frac{6 \cdot 3000^4}{8 \cdot 3\,180\,000}}{\left( \frac{3000^3}{3 \cdot 3\,180\,000} + \frac{4000}{78,5} \right)} \cong 6630 \text{ N}$$

La reazione  $R_a$  costituisce lo sforzo  $S$  che sollecita il filo a trazione; l'abbassamento  $\lambda$  dell'estremità della trave vale pertanto:

$$\lambda = \frac{S \cdot l}{E \cdot A}$$

Se il filo è di acciaio, numericamente si ha:

$$\lambda = \frac{6630 \cdot 4000}{205\,000 \cdot 78,5} \cong 1,65 \text{ mm}$$

### ESERCIZI PROPOSTI

- 2.a** ▲▲▲ Calcolare il momento flettente positivo  $M_f$  e quello negativo  $M_f$  agenti sulla struttura dell'esercizio precedente.

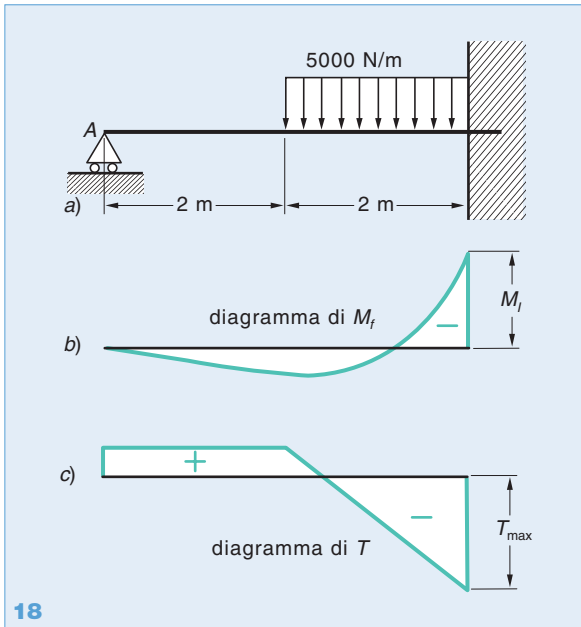
**Soluzione:**  $M_f \cong 3664$  N·m;  $M_f \cong -7108$  N·m.

- 2.b** ▲▲▲ L'appoggio di estremità della trave citata nell'esercizio 1.a dista 2 cm dalla trave stessa, che è costituita da un profilato IPE 120. Calcolare la reazione  $R_a$ .

**Soluzione:**  $R_a \cong 2514$  N.

- 2.c** ▲▲▲ Studiare la trave con appoggio e incastro schematizzata in FIGURA 18a a pagina seguente.

**Soluzione:**  $R_a \cong 1093$  N;  $R_y \cong 8906$  N;  $M_f \cong -5625$  N·m.



18

### 3 ESERCIZIO SVOLTO

**Argomento** Trave doppiamente incastrata

Tracciare i diagrammi delle sollecitazioni che agiscono sulla trave doppiamente incastrata di FIGURA 19a.

- La struttura ha tre vincoli sovrabbondanti; tuttavia, data la simmetria del carico, è facile prevedere che

$$R'_y = R_y = \frac{q \cdot l}{2} \quad M'_i = M$$

Pertanto le incognite del problema si riducono sensibilmente. Lo studio della struttura può essere impostato nel modo seguente: eliminiamo uno dei due incastri sostituendolo con le relative reazioni; una di queste ( $R'_y$ ) è nota, mentre l'altra è costituita dal momento d'incastro  $M'_i$ . Imponendo la condizione che sia nullo l'angolo di rotazione  $\alpha$  dell'estremità resa libera (FIGURA 19b), si ha:

$$\frac{q \cdot l^3}{6 \cdot E \cdot I} - \frac{R'_y \cdot l^2}{2 \cdot E \cdot I} + \frac{M'_i \cdot l}{E \cdot I} = 0$$

Ricordando che

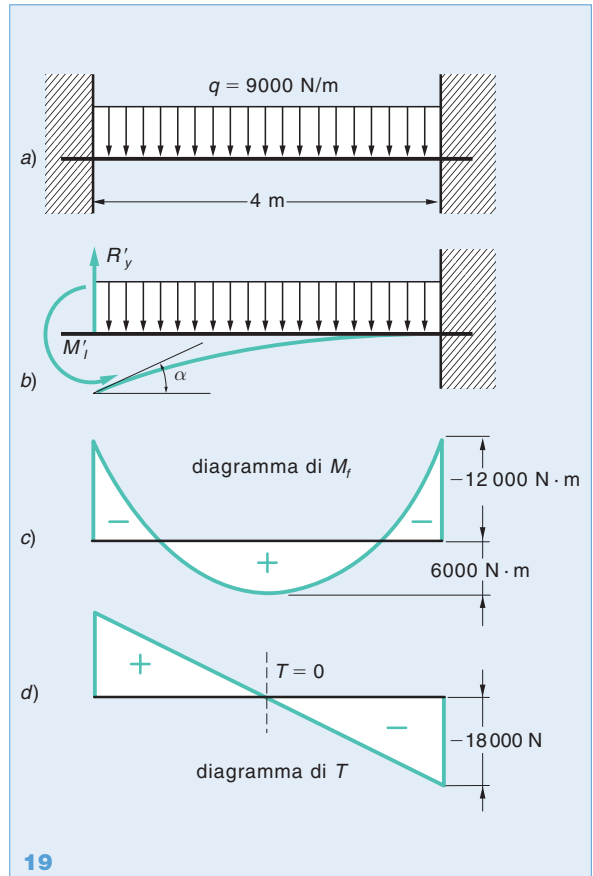
$$R'_y = \frac{q \cdot l}{2} \quad \text{si ottiene:} \quad \frac{q \cdot l^3}{6 \cdot E \cdot I} - \frac{q \cdot l^3}{4 \cdot E \cdot I} + \frac{M'_i \cdot l}{E \cdot I} = 0$$

e semplificando:

$$-\frac{q \cdot l^3}{12 \cdot E \cdot I} + \frac{M'_i \cdot l}{E \cdot I} = 0$$

da cui si ricava facilmente:

$$M'_i = \frac{q \cdot l^2}{12}$$



19

e con i dati numerici del testo:

$$M'_i = -\frac{9000 \cdot 4^2}{12} = 12000 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Ricavati i due momenti d'incastro e le due reazioni verticali, il calcolo preliminare è concluso. Il momento flettente varia lungo la trave con legge parabolica (FIGURA 19c) e presenta un massimo positivo in mezzera:

$$M_{f \max} = -M'_i + R'_y \cdot \frac{l}{2} - q \cdot \frac{(l/2)^2}{2}$$

che numericamente vale:

$$M_{f \max} = -12000 + 18000 \cdot 2 - \frac{9000 \cdot 2^2}{2} = 6000 \text{ N} \cdot \text{m}$$

come era facile ricavare direttamente dalla (15). Il diagramma del taglio non si discosta da quello di una trave appoggiata soggetta alle stesse condizioni di carico; l'ordinata iniziale vale:

$$T'_y = R'_y = q \cdot \frac{l}{2} = 18000 \text{ N}$$

in mezzera risulta:

$$T_0 = R'_y - q \cdot \frac{l}{2} = 18000 - 9000 \cdot 2 = 0$$



e il diagramma (FIGURA 19d) si conclude con l'ordina-  
ta negativa:

$$T_y = R_a - q \cdot l = 18000 - 9000 \cdot 4 = -18000 \text{ N} = -R_y$$

### ESERCIZI PROPOSTI

**3.a** ▲▲▲ Una trave doppiamente incastrata, lunga 3,60 m, costituita da un profilato a «doppio T» IPE 100, è soggetta a un carico uniformemente ripartito  $q = 5000 \text{ N/m}$  su tutta la sua lunghezza. Supponendo che gli incastri siano perfetti, verificare la resistenza della trave assumendo  $\sigma_r = 400 \text{ N/mm}^2$ .

**Soluzione:**  $\sigma \cong 158 \text{ N/mm}^2$ ;  $a \cong 2,53$ .

**3.b** ▲▲▲ Studiare la trave con due incastri schematizzata in FIGURA 20a. Tracciare anche i diagrammi del momento flettente e del taglio.

**Soluzione:**  $R_y = R'_y \cong 700 \text{ N}$ ;  $M_l \cong -700 \text{ N} \cdot \text{m}$ ;

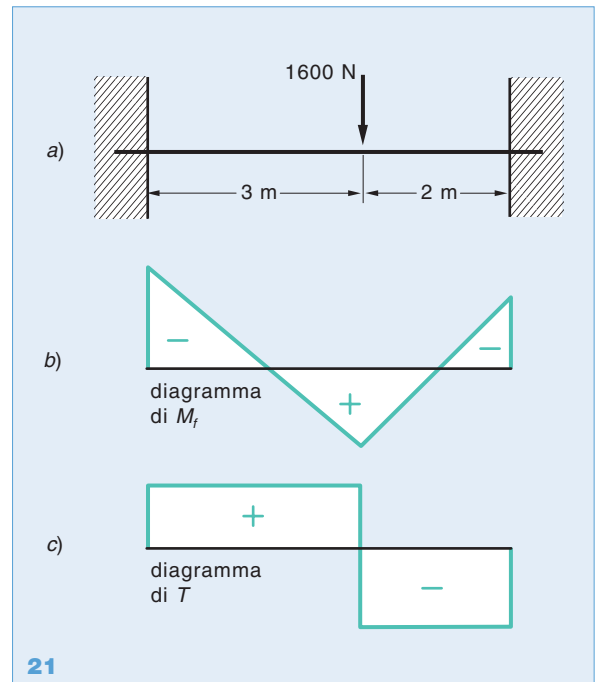
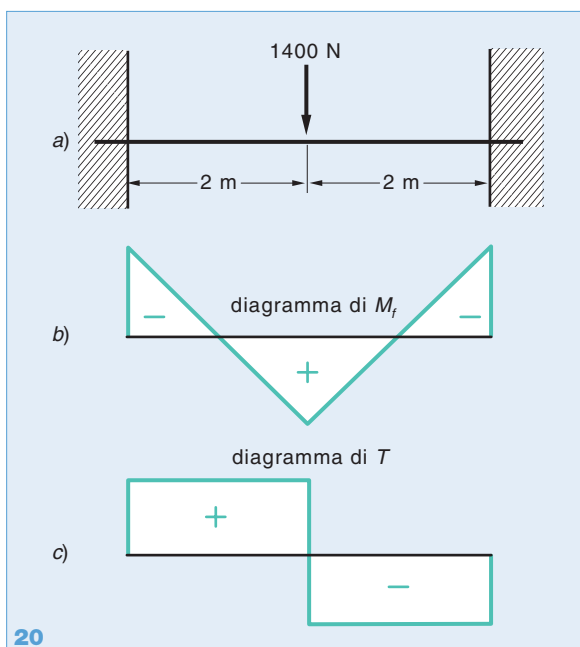
$M'_l \cong 700 \text{ N} \cdot \text{m}$ .

**3.c** ▲▲▲ Una trave doppiamente incastrata, lunga 4 m, soggetta a un carico di 20 kN concentrato in mezz'era, è costituita da due ferri a «C» rigidamente connessi lungo la costola. Verificare la resistenza assumendo  $\sigma_r = 380 \text{ N/mm}^2$ .

**Soluzione:**  $\sigma \cong 12,2 \text{ N/mm}^2$ ;  $a \cong 3,12$ .

**3.d** ▲▲▲ Dimensionare la trave di FIGURA 21 e tracciare i diagrammi delle sollecitazioni.

**Soluzione:**  $M_l \cong -770 \text{ N} \cdot \text{m}$ ;  $M'_l \cong -1150 \text{ N} \cdot \text{m}$ ;  
 $M_f \cong 920 \text{ N} \cdot \text{m}$ ; si sceglie un profilato IPE 140 con  
 $W_f = 77300 \text{ mm}^3$ .



21

### 4 ESERCIZIO SVOLTO

**Argomento** Trave su tre appoggi

Dimensionare una trave su tre appoggi FIGURA 22a (a pagine seguente) soggetta a un carico uniformemente ripartito ( $q = 4 \text{ kN/m}$ ) su tutta la sua lunghezza.

► Togliendo l'appoggio intermedio C e sostituendolo con la sua reazione incognita  $R_c$ , quest'ultima deve avere intensità tale da rendere nulla la freccia prodotta dal carico  $q$ ; poiché tale freccia si esprime con la formula:

$$f = \frac{5}{384} \cdot \frac{q \cdot l^4}{E \cdot I}$$

in cui  $l$  rappresenta la lunghezza complessiva della trave, deve essere (FIGURA 22b):

$$\frac{5}{384} \cdot \frac{q \cdot l^4}{E \cdot I} = \frac{1}{48} \cdot \frac{R_c \cdot l^3}{E \cdot I}$$

Semplificando:

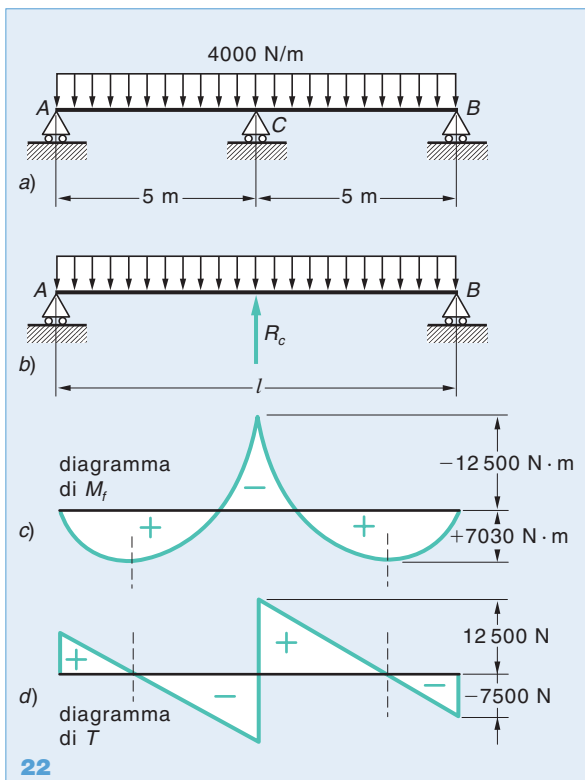
$$\frac{5}{8} \cdot q \cdot l^4 = R_c \cdot l^3$$

si ottiene:

$$R_c = \frac{5}{8} \cdot q \cdot l$$

e con i dati numerici:

$$R_c = \frac{5}{8} \cdot 4000 \cdot 10 = 25000 \text{ N}$$



22

Le altre reazioni risultano:

$$R_a = R_b = \frac{q \cdot l - R_c}{2} = \frac{4000 \cdot 10 - 25000}{2} = 7500 \text{ N}$$

e il diagramma degli sforzi di taglio assume l'aspetto illustrato in FIGURA 22d.

Il momento flettente varia con legge parabolica nelle due campate e presenta un massimo negativo in corrispondenza dell'appoggio centrale; tale massimo (FIGURA 22c) vale:

$$M_{f(C)} = R_a \cdot \frac{l}{2} - \frac{q \cdot (l/2)^2}{2}$$

e con i dati numerici:

$$M_{f(C)} = 7500 \cdot 5 - \frac{4000 \cdot 5^2}{2} = -12500 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Per quanto concerne il massimo positivo, ricaviamo dapprima l'ascissa  $x_0$  della sezione nella quale esso si verifica; imponendo la condizione:

$$R_a - q \cdot x_0 = 0$$

si ottiene:

$$x_0 = \frac{R_a}{q} = \frac{7500}{4000} = 1,875 \text{ m}$$

e il momento positivo risulta:

$$M_f = 7500 \cdot 1,875 - 4000 \cdot \frac{1,875^2}{2} \cong 7030 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Il dimensionamento della struttura deve essere eseguito basandosi sul massimo valore assoluto della sollecitazione; assunto perciò:

$$M_{f_{\max}} = 12500000 \text{ N} \cdot \text{mm}$$

e ritenendo, in mancanza di dati più precisi,  $\sigma_{am} = 140 \text{ N/mm}^2$ , risulta:

$$W_f = \frac{M_{f_{\max}}}{\sigma_{am}} = \frac{12500000}{140} \cong 89300 \text{ mm}^3 = 89,3 \text{ cm}^3$$

Il profilato più adeguato alle caratteristiche di carico è l'HE 100 B, cui corrisponde  $W_f = 90 \text{ cm}^3$ . Con tale scelta la tensione interna dovuta alla flessione diventa:

$$\sigma = \frac{12500000}{90000} \cong 139 \text{ N/mm}^2$$

### ESERCIZI PROPOSTI

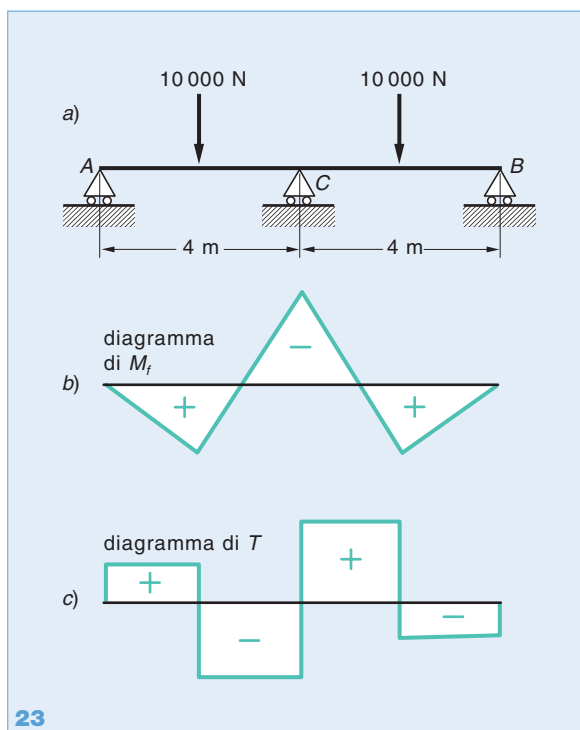
4.a ▲▲▲ Studiare la trave su tre appoggi schematizzata in FIGURA 23a; tracciare anche i diagrammi delle sollecitazioni.

**Soluzione:**  $R_a = R_b \cong 3125 \text{ N}$ ;  $R_c \cong 13750 \text{ N}$ ;

$M_{f(C)} \cong -7500 \text{ N} \cdot \text{m}$ ;  $M_f \cong 6250 \text{ N} \cdot \text{m}$ .

4.b ▲▲▲ La trave dell'esercizio precedente è costituita da un profilo a «doppio T» IPE 180. Ritenendo che i carichi applicati siano di 24 kN ciascuno, verificare la resistenza della struttura. Assumere  $\sigma_r = 380 \text{ N/mm}^2$ .

**Soluzione:**  $\sigma \cong 123 \text{ N/mm}^2$ ;  $a \cong 3,08$ .



23

## 5 ESERCIZIO SVOLTO

**Argomento** Trave Gerber

Studiare la trave Gerber schematizzata in FIGURA 24a.

- Interrompiamo il collegamento fra i due tronchi di trave togliendo la cerniera  $C$  e sostituendola con la reazione mutua  $R_c$ . Lo schema della struttura assume perciò l'aspetto illustrato in FIGURA 24b, consentendo il calcolo separato dei due tronchi. Considerando l'equilibrio alla rotazione del tronco di sinistra, possiamo scrivere:

$$F_1 \cdot 1 - R_c \cdot 3 = 0$$

da cui segue:

$$R_c = \frac{F_1}{3} = 100 \text{ N}$$

Inoltre dalla condizione di equilibrio alla traslazione verticale si ha:

$$F_1 + R_c - R_a = 0$$

e quindi:

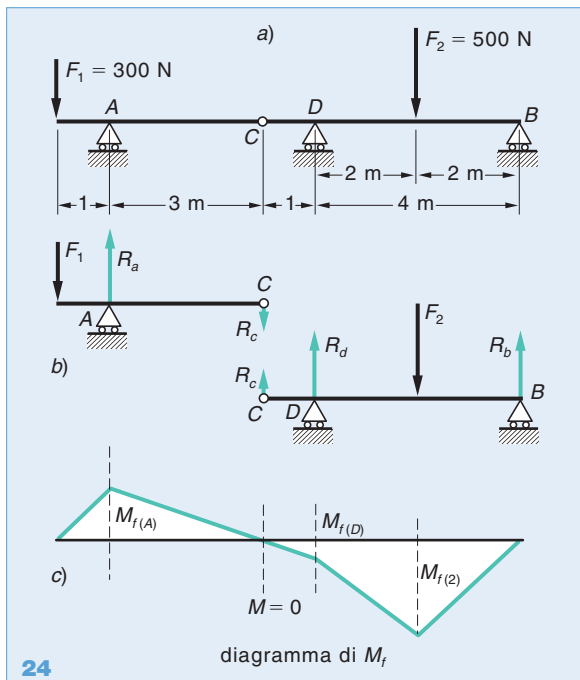
$$R_a = F_1 + R_c = 300 + 100 = 400 \text{ N}$$

Tenendo conto che la reazione  $R_c$  si trasmette all'altro tronco della struttura, è facile ricavare le reazioni dei vincoli rimanenti; annullando la sommatoria dei momenti rispetto all'appoggio  $D$ :

$$R_c \cdot 1 + F_2 \cdot 2 - R_b \cdot 4 = 0$$

si ottiene:

$$R_b = \frac{R_c \cdot 1 + F_2 \cdot 2}{4} = \frac{100 \cdot 1 + 500 \cdot 2}{4} = 275 \text{ N}$$



24

diagramma di  $M_f$

e infine:

$$R_d = R_c + F_2 - R_b = 100 + 500 - 275 = 325 \text{ N}$$

Completato il calcolo delle reazioni, si passa alla valutazione del momento flettente nelle varie sezioni; sull'appoggio  $A$  è

$$M_{f(A)} = -F_1 \cdot 1 = -300 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Successivamente il diagramma varia con legge lineare fino ad annullarsi in corrispondenza della cerniera; a titolo di controllo, calcoliamo:

$$M_{f(C)} = -F_1 \cdot 4 + R_a \cdot 3 = -300 \cdot 4 + 400 \cdot 3 = 0$$

come era stato previsto. Nel punto di appoggio centrale  $D$  il momento flettente assume il valore:

$$M_{f(D)} = -F_1 \cdot 5 + R_a \cdot 4 = -300 \cdot 5 + 400 \cdot 4 = 100 \text{ N} \cdot \text{m}$$

positivo, in contrasto con quanto accade nelle travi continue. L'ultimo valore della sollecitazione riguarda la sezione in cui è applicato il carico  $F_2$ :

$$M_{f(2)} = R_b \cdot 2 = 275 \cdot 2 = 550 \text{ N} \cdot \text{m}$$

valutato con le forze a destra della sezione per maggior comodità di calcolo.

Il diagramma del momento flettente è stato ottenuto direttamente «saldando» fra loro i diagrammi parziali dei due tronchi (FIGURA 24c) e tracciando la linea fondamentale passante per i punti in cui la sollecitazione deve necessariamente annullarsi. L'eventuale dimensionamento della struttura verrà eseguito assumendo  $M_{f\max} = 550 \text{ N} \cdot \text{m}$ , valore che si manifesta nella sezione in cui è applicato il carico  $F_2$ .

### ESERCIZI PROPOSTI

- 5.a ▲▲▲ Risolvere l'esercizio 5 nell'ipotesi che sulla struttura agisca il solo carico  $F_1$  di 300 N.

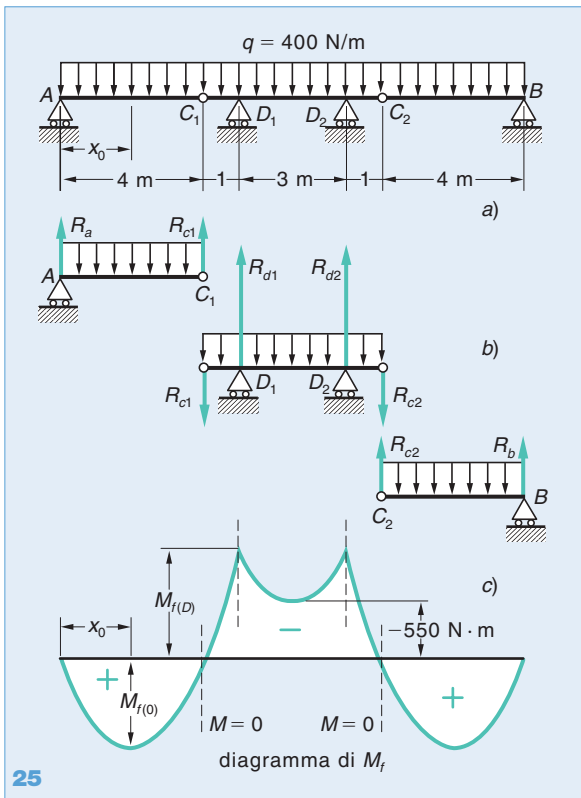
**Soluzione:**  $R_a = 400 \text{ N}$ ;  $R_c = 100 \text{ N}$ ;  $R_d = -125 \text{ N}$ ;

$$R_b = 25 \text{ N}; M_{f(A)} = -300 \text{ N} \cdot \text{m}; M_{f(C)} = 0; M_{f(D)} = 100 \text{ N} \cdot \text{m}; M_{f(2)} = 50 \text{ N} \cdot \text{m}.$$

- 5.b ▲▲▲ Risolvere l'esercizio 5 nell'ipotesi che il carico concentrato  $F_2$  sia sostituito da un carico uniformemente ripartito ( $q = 200 \text{ N/m}$ ) sul tronco di destra e  $F_1 = 300 \text{ N}$ .

**Soluzione:**  $R_a = 400 \text{ N}$ ;  $R_c = 100 \text{ N}$ ;  $R_d = 275 \text{ N}$ ;

$$R_b = 425 \text{ N}; M_{f(A)} = -300 \text{ N} \cdot \text{m}; M_{f(C)} = 0; M_{f(D)} = 100 \text{ N} \cdot \text{m}; M_{f(2)} = 850 \text{ N} \cdot \text{m}.$$



25

### 6 ESERCIZIO SVOLTO

**Argomento** Trave Gerber

Una trave Gerber su quattro appoggi è soggetta a un carico uniformemente ripartito ( $q = 400 \text{ N/m}$ ). Calcolare le reazioni dei vincoli e i momenti flettenti massimi (FIGURA 25a).

- Il problema non si discosta sensibilmente da quello considerato nell'esercizio 5, anche se la simmetria del carico ne semplifica notevolmente i calcoli. Frazionata la struttura in tre tronchi (FIGURA 25b) è evidente che i risultati ricavati per il tronco di sinistra valgono anche per quello di destra. Otteniamo perciò direttamente:

$$R_a = R_{c1} = \frac{400 \cdot 4}{2} = 800 \text{ N}$$

e anche:

$$R_b = R_{c2} = \frac{400 \cdot 4}{2} = 800 \text{ N}$$

Possiamo perciò passare immediatamente al calcolo delle reazioni dei due appoggi  $D_1$  e  $D_2$  posti nel tratto centrale; dall'equilibrio alla rotazione intorno all'appoggio  $D_1$  si ha:

$$R_{c1} \cdot 1 - Q \cdot 1,5 + R_{d2} \cdot 3 - R_{c2} \cdot 4 = 0$$

da cui si ottiene:

$$R_{d2} = \frac{400 \cdot 5 \cdot 1,5 + 800 \cdot 4 - 800 \cdot 1}{3} = 1800 \text{ N}$$

Per motivi di simmetria risulta anche:

$$R_{d1} = 1800 \text{ N}$$

Detta  $x_0$  l'ascissa della sezione in cui si verifica il massimo momento positivo, imponiamo la condizione:

$$R_a - q \cdot x_0 = 0$$

ricavando:

$$x_0 = \frac{R_a}{q} = \frac{800}{400} = 2 \text{ m}$$

come era logico prevedere in quanto il momento stesso deve annullarsi in corrispondenza delle due cerniere. Il massimo positivo vale:

$$M_{f(0)} = \frac{400 \cdot 4^2}{8} = 800 \text{ N} \cdot \text{m}$$

per entrambe le campate laterali. Sui due appoggi intermedi è invece:

$$M_{f(D)} = 800 \cdot 5 - \frac{400 \cdot 5^2}{2} = -1000 \text{ N} \cdot \text{m}$$

e il diagramma assume la configurazione illustrata in FIGURA 25c con una punta in mezzeria di  $-550 \text{ N} \cdot \text{m}$ .

### ESERCIZI PROPOSTI

- 6.a ▲▲▲ Risolvere l'esercizio 6 nell'ipotesi che siano caricate ( $q = 400 \text{ N/m}$ ) solo le due campate laterali.

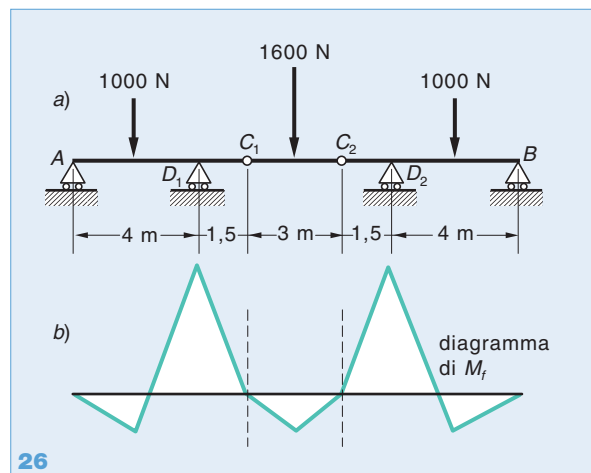
**Soluzione:**  $R_a = R_b = 800 \text{ N}$ ;  $R_{d1} = R_{d2} = 1200 \text{ N}$ ;

$M_{f(0)} = 800 \text{ N} \cdot \text{m}$ ;  $M_{f(D)} = -1000 \text{ N} \cdot \text{m}$ ;  $M_{f(\text{mezz.})} = -1000 \text{ N} \cdot \text{m}$ .

- 6.b ▲▲▲ Studiare la trave Gerber schematizzata in FIGURA 26a e tracciare il diagramma dei momenti.

**Soluzione:**  $R_a = R_b = 200 \text{ N}$ ;  $R_{d1} = R_{d2} = 1600 \text{ N}$ ;

$M_{f(0)} = 200 \text{ N} \cdot \text{m}$ ;  $M_{f(D)} = -1600 \text{ N} \cdot \text{m}$ ;  $M_{f(\text{mezz.})} = 200 \text{ N} \cdot \text{m}$



26

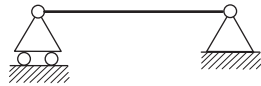
## QUESITI

**1** Esporre, al massimo in 20 parole, la definizione di travi Gerber.

**2** Descrivere, al massimo in 10 righe, i vantaggi offerti dalle travi Gerber rispetto a una trave continua.

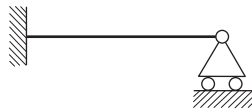
**3** La struttura illustrata a fianco è:

- a labile.
- b isostatica.
- c iperstatica.



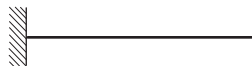
**4** La struttura illustrata a fianco è:

- a labile.
- b isostatica.
- c iperstatica.



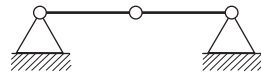
**5** La struttura illustrata a fianco è:

- a labile.
- b isostatica.
- c iperstatica.



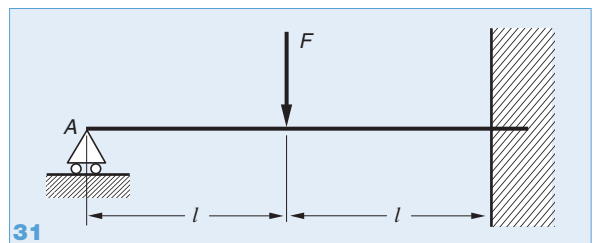
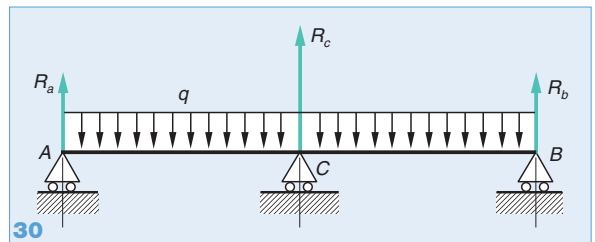
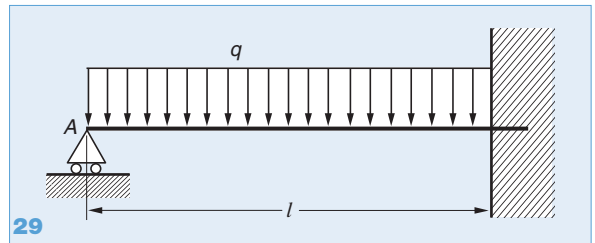
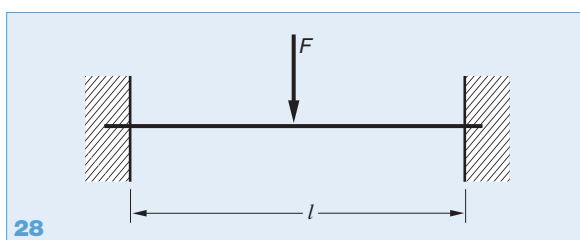
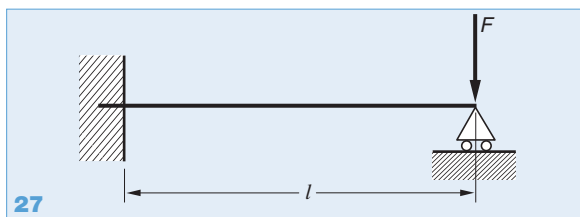
**6** La struttura illustrata a fianco è:

- a labile.
- b isostatica.
- c iperstatica.



**7** Nella trave di FIGURA 27  $F = 100$  N e  $l = 1$  m; calcolare il momento d'incastro  $M_i$ .

**8** La trave doppiamente incastrata di FIGURA 28, lunga 1 m, è caricata in mezzeria da una forza  $F = 500$  N. Calcolare le reazioni verticali che si hanno nei due incastri.



**9** Con riferimento alla trave una volta iperstatica di FIGURA 29, spiegare in non più di 5 righe il procedimento da usare per trovare la reazione in A.

**10** Con riferimento alla trave una volta iperstatica di FIGURA 30, spiegare in non più di 5 righe il procedimento da usare per trovare la reazione in C.

**11** Con riferimento alla trave una volta iperstatica di FIGURA 31, si possono avere tre diversi casi.

Caso 1:  $F = 1$  kN,  $l = 2$  m

Caso 2:  $F = 1$  kN,  $l = 1$  m

Caso 3:  $F = 1$  kN,  $l = 4$  m

La reazione  $R_A$ :

- a sarà maggiore nel caso 1.
- b sarà maggiore nel caso 2.
- c sarà maggiore nel caso 3.
- d sarà sempre la stessa.

**12** Con riferimento alla trave una volta iperstatica di FIGURA 31, si possono avere tre diversi casi.

Caso 1:  $F = 2$  kN,  $l = 2$  m

Caso 2:  $F = 3$  kN,  $l = 1$  m

Caso 3:  $F = 1$  kN,  $l = 4$  m

La reazione  $R_A$ :

- a sarà maggiore nel caso 1.
- b sarà maggiore nel caso 2.
- c sarà maggiore nel caso 3.
- d sarà sempre la stessa.