Approfondimento

Formule empiriche

Scrivendo la (9.6) del testo nella forma:

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda^2} \qquad (1)$$

e assumendo un sistema di assi cartesiani in cui siano riportati in ascisse i valori di λ e in ordinate i corrispondenti valori della tensione interna σ, la relazione sopra scritta è rappresentabile graficamente con un ramo di iperbole cubica (FIGURA **1**); l'iperbole, tuttavia, si interrompe in corrispondenza dell'ascissa: $x = \lambda_{lim}$, in quanto per valori di λ inferiori a tale limite decade la validità della formula di Eulero, dalla quale la (1) deriva direttamente. Sorge perciò la necessità di trovare delle formule atte al dimensionamento della struttura nel campo compreso fra l'asse delle ascisse ($\lambda = 0$) e il limite di applicazione della relazione di Eulero ($\lambda = \lambda_{lim}$).

La maggior parte delle formule proposte ha carattere principalmente sperimentale; quasi tutte sono rappresentabili graficamente con linee o curve che, in corrispondenza del valore $\lambda = \lambda_{lim}$, si ricollegano all'iperbole cubica di Eulero. La relazione più semplice è di **tipo lineare**:

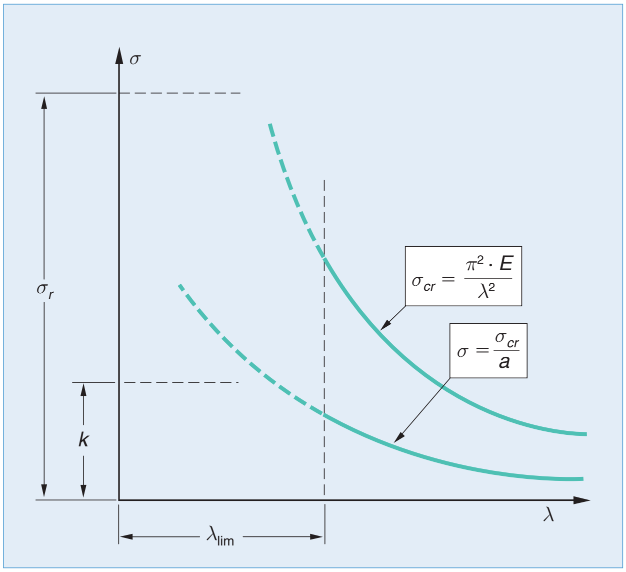
$$\sigma_{cr} = a - b \cdot \lambda \qquad (2)$$

in cui a e b rappresentano due coefficienti numerici dipendenti dalla natura del materiale. Per i materiali di uso più comune essa diventa:

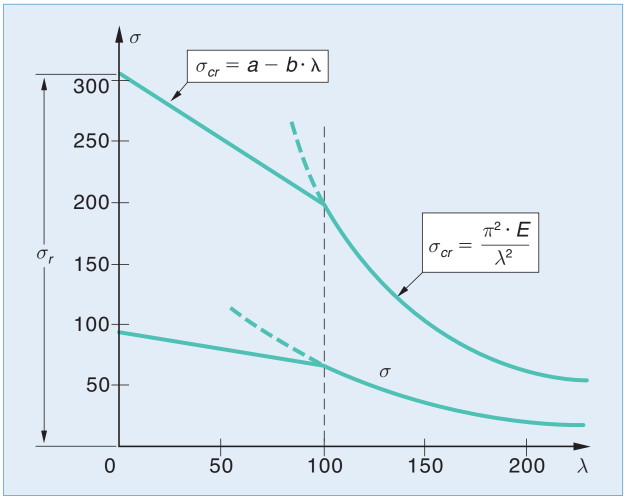
- $\sigma_{cr} = 310 - 1{,}14 \cdot \lambda$ (ferro omogeneo);
- $\sigma_{cr} = 303 - 1{,}29 \cdot \lambda$ (ferro saldato);
- $\sigma_{cr} = 298 - 1{,}94 \cdot \lambda$ (legno);

e il diagramma assume la configurazione illustrata in FIGURA **2**.

È evidente che applicando la (2) si esclude completamente l'ipotesi del dimensionamento a compressione semplice; infatti, non appena il rapporto di snellezza assume valori diversi da zero, anche se piccolissimi (trave tozza), il valore di σ_{cr} inizia a decrescere progressivamente.



1 Iperbole cubica di Eulero.



2 Formule lineari.

Più coerenti sono le **formule delle ferrovie italiane**, che prevedono un carico di sicurezza costante per valori di λ inferiori a 30, mentre per valori superiori tale carico diminuisce linearmente; indicando con σ_{amc} il normale carico di sicurezza statico a compressione e con σ_{amr} il **carico di sicurezza ridotto** che stabilisce il limite ammissibile per la tensione interna, le ipotesi suddette si esprimono con le relazioni:

- $\sigma_{amr} = \sigma_{amc}$ per $(\lambda \leq 30)$;
- $\sigma_{amr} = \sigma_{amc} \cdot (1{,}207 - 0{,}0069 \cdot \lambda)$ per $(30 < \lambda \leq 105)$;
- $\sigma_{amr} = \sigma_{amc} \cdot \left(\dfrac{5300}{\lambda^2}\right)$ per $(\lambda > 105)$;

valide soprattutto per materiali ferrosi.

Ritenendo applicabili le formule sopra scritte, nel campo compreso fra l'asse delle ordinate e l'ascissa corrispondente a λ_{lim}, il diagramma assume la forma illustrata in FIGURA **3**.

In modo analogo, le **norme delle ferrovie tedesche** prescrivono che la relazione fra σ_{cr} e λ sia rappresentata da:

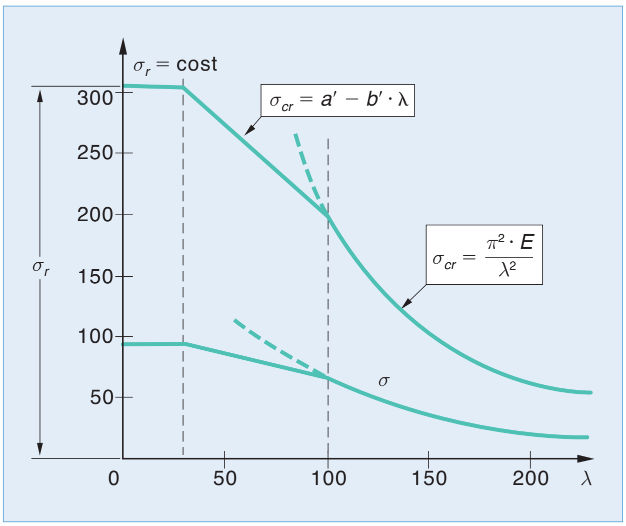
- una retta orizzontale per $0 < \lambda \leq 60$;
- una retta inclinata per $60 < \lambda \leq 100$.

Tale retta incontra l'iperbole cubica di Eulero nel punto di ascissa $x = \lambda_{lim}$, raccordandosi con essa in modo da completare organicamente il diagramma.

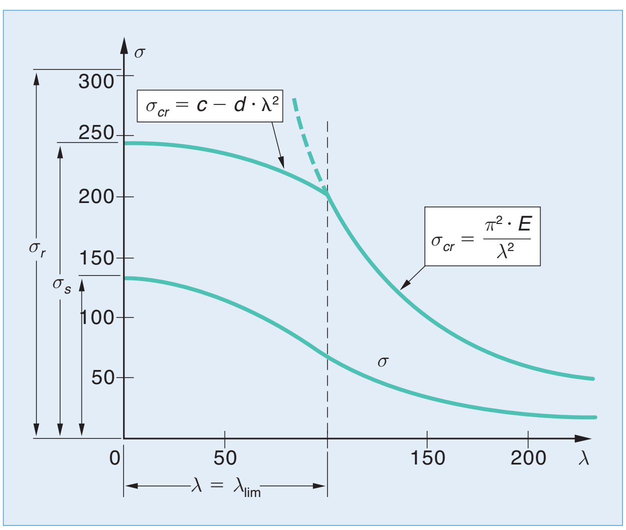
Molto usate sono anche le **formule paraboliche** del tipo:

$$\sigma_{cr} = c - d \cdot \lambda^2 \qquad (3)$$

in cui si assume comunemente il coefficiente c coincidente con il carico unitario di snervamento del materiale; il coefficiente numerico d viene assunto in modo che, in corrispondenza dell'ascissa $x = \lambda_{lim}$, la parabola (3) si raccordi con l'iperbole cubica di Eulero. Il diagramma assume perciò la configurazione di FIGURA **4**.



3 Diagramma completo del carico di punta.



4 Formule paraboliche per travi tozze.