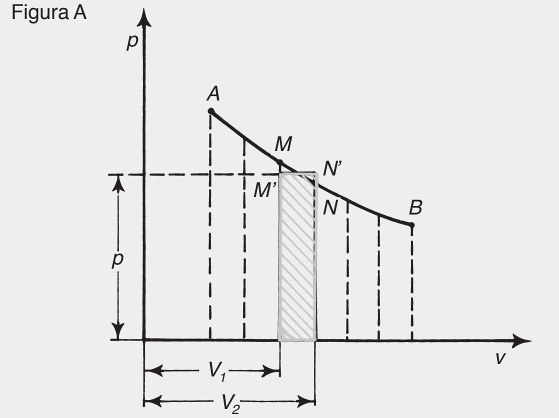
Capitolo 17

Lo stato fisico di un aeriforme è noto quando sono note due delle tre variabili fondamentali (pressione, volume specifico e temperatura) in quanto la terza è nota tramite l'equazione $p \cdot v = R \cdot T$. In un sistema di assi cartesiani $p - v$ **ogni punto P del piano può essere considerato come il punto rappresentativo dello stato fisico di un determinato gas in un certo istante**; la temperatura verrà dedotta mediante l'equazione di stato. Da tale diagramma è possibile determinare il lavoro che il gas compie (o quello su di esso esercitato) quando subisce una trasformazione passando da uno stato fisico a un altro. Un gas, passando dallo stato fisico A ad uno B **tramite una trasformazione termodinamica** individua, tramite **l'insieme delle successive posizioni** occupate dal punto, una **linea di trasformazione**. L'andamento della linea di trasformazione dipende dalle modalità con cui tale trasformazione è avvenuta. Suddividiamo l'area compresa fra la curva e l'asse delle ascisse in tante strisce verticali di spessore piccolissimo (figura A) la sua area, che vale $a_1 = p \cdot (v_2 – v_1)$, ha la stessa espressione (16.15) del lavoro esterno unitario; estendendo il procedimento a tutta l'area A sottostante la curva di trasformazione, risulta: $A = \Sigma_{ai} = \Sigma_l = l$, ove l_i è il lavoro elementare compiuto dal fluido (o ad esso somministrato) nel breve tratto di curva relativo a una striscia. Quindi, nel diagramma $p - v$ il lavoro compiuto dal fluido (o quello ricevuto) vale l'area compresa fra la curva di trasformazione, l'asse delle ascisse e le normali a essa abbassate dai due punti estremi della curva. Il lavoro è compiuto dal fluido e si considera positivo quando la trasformazione si evolve nel senso dei volumi crescenti (da A verso B), negativo se procede in senso inverso (da B verso A). L'area sottostante sarà tanto più grande (maggiore è il lavoro scambiato con l'esterno) quanto più alta è la posizione della curva rispetto all'asse delle ascisse.

Consideriamo 1 kg di un gas perfetto, racchiuso in un recipiente indeformabile il cui stato fisico è caratterizzato da p_1, v_1 e T_1 legate dalla relazione $p_1 \cdot v_1 = R \cdot T_1$. Somministrando calore q, la temperatura aumenterà da T_1 a T_2 e non potendo variare il volume, aumenterà la pressione da p_1 a p_2 in modo da soddisfare l'equazione caratteristica dei gas $p_2 \cdot v_1 = R \cdot T_2$. Dividendo membro a membro le due relazioni e con qualche semplice passaggio si ottiene:

Figura A



$$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2}$$

o in generale, possiamo scrivere l'equazione caratteristica di tale trasformazione come:

$$\frac{p}{T} = \text{cost}$$

equazione che caratterizza ogni **trasformazione a volume costante** (o *isocora* o *isometrica*). Altre caratteristiche di una trasformazione isocora sono:

- il lavoro esterno è nullo ($l = 0$);
- il calore somministrato produce un aumento della pressione e della temperatura;
- il calore eventualmente sottratto provoca una riduzione della pressione e della temperatura;
- la linea di trasformazione nel piano $p - v$ è parallela all'asse delle ordinate;
- la variazione di energia interna è:

$$u_2 - u_1 = c_v \cdot (T_2 - T_1);$$

- la variazione di entropia è: $s_2 - s_1 = c_p \cdot \ln(T_2/T_1)$.

Consideriamo 1 kg di gas perfetto racchiuso in un recipiente munito di uno stantuffo (che si muove senza attrito), su cui agisca una forza F = cost il cui stato fisico è determinato da T_1 e p_1. Il volume specifico si ricava dall'equazione caratteristica:

$$p_1 \cdot v_1 = R \cdot T_1$$

Somministrando al gas il calore q, la sua temperatura aumenta da T1 a T2 mentre non varia p_1 (dipendente solo dai fattori esterni agenti sullo stantuffo):

$$p_1 \cdot v_2 = R \cdot T_2$$

Il gas ha compiuto una trasformazione a pressione costante (o *isobarica* o *isobara*) **utilizzando il calore somministratogli per incrementare la sua temperatura e il suo volume**. Dividendo membro a membro le due relazioni soprascritte, risulta:

$$\frac{v_1}{T_1} = \frac{v_2}{T_2} \qquad (17.3)$$

o in generale:

$$\frac{v}{T} = \text{cost} \qquad (17.4)$$

equazione che caratterizza ogni **trasformazione a pressione costante**. Le altre caratteristiche sono:

- la linea di trasformazione nel piano $p - v$ è parallela all'asse delle ascisse;

- il lavoro esterno è dato da: $l = p \cdot (v_2 - v_1)$;
- il calore somministrato produce un aumento del volume e della temperatura;
- il calore sottratto provoca una riduzione di volume e di temperatura;
- la variazione di entropia è:

$$s_2 - s_1 = c_v \cdot \ln \frac{T_2}{T_1}$$

- l'equazione fondamentale è:

$$c_p \cdot (T_2 - T_1) = c_v \cdot (T_2 - T_1) + p \cdot (v_2 - v_1)$$

Da quest'ultima relazione si ricava: $c_p = c_v + R$ (17.5) dove la costante R varia solo con la natura del gas e indica che $c_p > c_v$.

Consideriamo 1 kg di gas perfetto il cui stato fisico iniziale è individuato da p_1, v_1 e T_1; supponiamo di aumentare gradualmente la pressione esercitando un certo lavoro esterno sull'aeriforme contenuto nel recipiente. Il volume dell'aeriforme si riduce a un valore v_2 e contemporaneamente parte del lavoro somministrato si trasforma in calore elevando la temperatura del gas. Se contemporaneamente procediamo a una **graduale sottrazione di calore**, evitando variazioni di T_1, il gas ha compiuto una **trasformazione a temperatura costante** o, più precisamente, una **isotermica di compressione**.

Dall'equazione caratteristica nello stato iniziale p1 · $v_1 = R \cdot T_1$ e in quello finale $p_2 \cdot v_2 = R \cdot T_1$, uguagliando i primi membri si ottiene:

$$p_1 \cdot v_1 = p_2 \cdot v_2 \qquad (17.6)$$

ovvero:

$$p \cdot v = \text{cost} \qquad (17.7)$$

equazione che rispecchia l'enunciato della legge di Boyle, e nel piano $p - v$, rappresenta una iperbole equilatera avente per asintoti gli assi coordinati. La trasformazione può avvenire anche in senso inverso, riducendo la pressione iniziale e lasciando di conseguenza al gas la possibilità di espandersi; si parlerà, in questo caso, di **espansione isotermica** (il calore dovrà essere somministrato per compensare la tendenza della temperatura a diminuire). Le altre caratteristiche sono:

- non si manifesta variazione di energia interna;
- il calore sottratto (o somministrato) uguaglia l'equivalente termico del lavoro speso (o sviluppato);
- tale lavoro è dato da: $l = p_i \cdot v_i \cdot \ln \dfrac{v_2}{v_1}$
- se la pressione aumenta, il volume deve diminuire e si tratta di una compressione; in tal caso, occorre spendere lavoro, e il gas cede calore all'esterno; il lavoro si considera negativo;
- se la pressione diminuisce, il volume deve aumentare e si tratta di una espansione; in tal caso, il gas assorbe calore dall'esterno e produce un lavoro che viene assunto come positivo;
- la variazione di entropia è:

$$s_2 - s_1 = \frac{l}{T} \cdot \ln \frac{v_2}{v_1}$$

Consideriamo 1 kg di gas perfetto racchiuso in un cilindro munito di stantuffo, mobile senza attrito, e che cilindro e stantuffo siano isolati in modo che il calore non possa trasmettersi attraverso le pareti. Se aumentiamo gradualmente la pressione agente sullo stantuffo il volume diminuisce e, non potendosi trasmettere all'esterno il calore, aumenta la temperatura. Il gas ha subito una **trasformazione senza scambio di calore con l'esterno**, (trasformazione **adiabatica**). L'equazione caratteristica di una trasformazione adiabatica è:

$$p \cdot v^{\gamma} = \text{cost} \qquad (17.8)$$

in cui γ è dato dal rapporto dei calori specifici c_p e c_v.

Inoltre:

- nel piano $p - v$ l'adiabatica è rappresentata da una iperbole non equilatera;
- **se si tratta di una espansione**, aumenta il volume mentre diminuiscono pressione e temperatura; in questo caso, il lavoro compiuto dal fluido è positivo e il suo valore è $l = -\, c_v \cdot (T_2 - T_1)$;
- **se si tratta invece di una compressione**, diminuisce il volume mentre aumentano pressione e temperatura; in questo caso il lavoro è somministrato al fluido dall'esterno e viene considerato negativo;
- la variazione di entropia è nulla; l'adiabatica è una trasformazione a entropia costante (**isoentropica**).

Abbiamo visto che in una trasformazione adiabatica, l'equazione caratteristica è: $p \cdot v^{\gamma} = \text{cost}$. In una trasformazione isotermica è: $p \cdot v = \text{cost}$. In una trasformazione intermedia fra una adiabatica e una isotermica, l'equazione caratteristica è del tipo:

$$p \cdot v^n = \text{cost} \qquad (17.9)$$

con 1 (isotermica) $< n < \gamma$ (adiabatica). Tale trasformazione viene definita **politropica**.
Se supponiamo $n = 0$, l'equazione diventa $p = \text{cost}$.

Cioè durante tutta la trasformazione, rimane costante il valore della pressione: in definitiva si tratta di un'isobara.

In modo analogo, ponendo $n = \infty$ si ottiene: $v = \text{cost}$, **equazione caratteristica di un'isometrica**.

In una trasformazione politropica:

- si ha scambio di calore, esprimibile dalla relazione:

$$q = c \cdot (T_2 \cdot T_1) \qquad (17.11)$$

a ogni valore dell'esponente n della politropica corrisponde un valore ben determinato del coefficiente c, ricavabile dalla formula:

$$n = \frac{c_p - c}{c_v - c} \tag{17.12}$$

- le equazioni generali della curva (e le formule che esprimono il lavoro) sono le stesse gia trovate per l'adiabatica, sostituendo γ con n;
- una trasformazione politropica può rappresentare – a seconda del valore dell'esponente n – una qualsiasi delle trasformazioni semplici precedentemente descritte;
- se la politropica è di espansione, con n compreso fra 1 e γ, il volume aumenta mentre diminuiscono pressione e temperatura;
- in una compressione politropica – con lo stesso valore di n – diminuisce il volume mentre aumentano pressione e temperatura; l'aumento di questa è però inferiore a quello ottenuto con una adiabatica;
- per n compreso fra zero e uno, aumentano volume e temperatura e diminuisce la pressione, mentre si somministra calore dall'esterno;
- per n compreso fra γ e ∞, si ottiene una trasformazione lungo la quale aumenta il volume e diminuiscono pressione e temperatura, mentre si sottrae calore al gas.