Approfondimento

Dimostrazione della (12.7) e (12.8)

Per valutare le conseguenze derivanti dalle oscillazioni elastiche libere e determinare l'intensità della pulsazione ω_e che le caratterizza, supponiamo che sul sistema non agiscano altre forze esterne; di conseguenza, le due masse volaniche sono soggette, durante il moto, a due momenti uguali e opposti M_t e $-M_t$, che possiamo esprimere con le relazioni:

$$M_t = J_1 \cdot \frac{d^2\theta_1}{dt^2} \qquad (1)'$$

$$-M_t = J_2 \cdot \frac{d^2\theta_2}{dt^2} \qquad (1)''$$

Per giustificare le due formule sopra scritte, occorre fare un passo indietro, richiamando alcuni concetti fondamentali di dinamica e di cinematica. È noto infatti che un solido, sollecitato a ruotare da un momento esterno, reagisce opponendo a quest'ultimo una coppia d'inerzia (o reazione inerziale), funzione diretta del suo momento d'inerzia di massa J e dell'accelerazione angolare ε, generata in seguito all'applicazione del momento esterno. La condizione di equilibrio istantaneo è espressa perciò dalla relazione: $M = J \cdot \varepsilon$.

D'altra parte, la cinematica insegna che l'accelerazione – sia essa tangenziale o angolare – **è la derivata della velocità rispetto al tempo; a sua volta la velocità può essere ottenuta come derivata dello spazio rispetto al tempo**.

Possiamo scrivere:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \qquad \text{e anche} \qquad \varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

La legge fondamentale della dinamica, ora richiamata, diventa perciò:

$$M = J \cdot \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

dimostrando a sufficienza l'esattezza delle formule (1) sopra citate.

Ciò premesso, nella (1)′ inseriamo l'espressione del momento (12.5) del testo e la (12.4)′ del testo relativa all'angolo di deformazione θ_1; otteniamo:

$$M_{max} \cdot \text{sen}\,(\omega_e \cdot t) = J_1 \cdot \frac{d^2}{dt^2}\,[\theta_{1(max)} \cdot \text{sen}\,(\omega_e \cdot t)] \qquad (2)$$

Derivando due volte il termine che appare al secondo membro:

$$\frac{d}{dt}[\theta_{1(\max)} \cdot \text{sen}\,(\omega_e \cdot t)] = \theta_{1(\max)} \cdot \omega_e \cdot \cos\,(\omega_e \cdot t)$$

$$\frac{d}{dt}[\theta_{1(\max)} \cdot \omega_e \cdot \cos\,(\omega_e \cdot t)] = -\theta_{1(\max)} \cdot \omega_e^2 \cdot \text{sen}\,(\omega_e \cdot t)$$

la (2) diventa:

$$M_{\max} \cdot \text{sen}\,(\omega_e \cdot t) = -J_1 \cdot \theta_{1\,(\max)} \cdot \omega_e^2 \cdot \text{sen}\,(\omega_e \cdot t)$$

e semplificando:

$$M_{\max} = -J_1 \cdot \omega_e^2 \cdot \theta_{1\,(\max)} \tag{3}$$

Operando in modo analogo sulla (1)″:

$$-M_{\max} \cdot \text{sen}\,(\omega_e \cdot t) = J_2 \cdot \frac{d^2}{dt^2}[\theta_{2(\max)} \cdot \text{sen}\,(\omega_e \cdot t)]$$

tralasciando i passaggi, peraltro identici ai precedenti, si ottiene:

$$M_{\max} = J_2 \cdot \omega_e^2 \cdot \theta_{2\,(\max)} \tag{4}$$

Dalla (3) si ricava:

$$\theta_{1(\max)} = -\frac{M_{\max}}{\omega_e^2 \cdot J_1}$$

e dalla (4):

$$\theta_{2(\max)} = \frac{M_{\max}}{\omega_e^2 \cdot J_2}$$

Sostituendo tali espressioni nella (12.6) del testo, otteniamo:

$$M_{\max} = K \cdot \left[\frac{M_{\max}}{\omega_e^2 \cdot J_2} - \left(-\frac{M_{\max}}{\omega_e^2 \cdot J_1}\right)\right]$$

e, dopo le opportune semplificazioni, perveniamo alla formula definitiva:

$$\boxed{\omega_e^2 = K \cdot \left(\frac{1}{J_1} + \frac{1}{J_2}\right)} \tag{5}$$

ovvero, in altra forma:

$$\boxed{\omega_e^2 = \frac{G \cdot I_p}{L} \cdot \left(\frac{1}{J_1} + \frac{1}{J_2}\right)} \tag{6}$$

che consente la valutazione della pulsazione ω_e delle oscillazioni torsionali libere.