Approfondimento

Dimostrazione della (12.14)

L'ipotesi che gli spostamenti angolari e il momento seguono leggi di variazioni analoghe, con la stessa pulsazione, ci consente di impostare le seguenti espressioni:

$$\theta_1 = \theta_{1\,(\max)} \cdot \text{sen}\,(\omega_0 \cdot t) \qquad (1)'$$

$$\theta_2 = \theta_{2\,(\max)} \cdot \text{sen}\,(\omega_0 \cdot t) \qquad (1)''$$

$$M_t = M_{\max} \cdot \text{sen}\,(\omega_0 \cdot t) \qquad (1)'''$$

sostanzialmente analoghe alle (12.4) e (12.5) del testo, salvo il diverso valore della pulsazione. Sostituendo nella (12.10) del testo le espressioni (12.18) si ottiene:

$$M_{\max} = K \cdot (\theta_{2\,(\max)} - \theta_{1\,(\max)}) \qquad (2)$$

Derivando due volte le funzioni armoniche che caratterizzano gli spostamenti angolari, le (12.11) e (12.12) del testo diventano rispettivamente:

$$M_{1\,(\max)} + M_{\max} = -\,\omega_0^2 \cdot J_1 \cdot \theta_{1\,(\max)} \qquad (3)$$

$$M_{2\,(\max)} - M_{\max} = -\,\omega_0^2 \cdot J_2 \cdot \theta_{2\,(\max)} \qquad (4)$$

Il sistema costituito dalle (2), (3) e (4) risolve il problema, consentendo la valutazione delle principali caratteristiche del moto oscillatorio; ricavando infatti dalla (3):

$$\theta_{1(\max)} = -\frac{M_{1(\max)} + M_{\max}}{\omega_0^2 \cdot J_1} \qquad \text{e dalla (4):} \qquad \theta_{2(\max)} = -\frac{M_{2(\max)} - M_{\max}}{\omega_0^2 \cdot J_2}$$

e sostituendo questi valori nella (2):

$$M_{\max} = K \cdot \left(-\frac{M_{2(\max)} - M_{\max}}{\omega_0^2 \cdot J_2} + \frac{M_{1(\max)} + M_{\max}}{\omega_0^2 \cdot J_1} \right)$$

si ottiene:

$$\omega_0^2 \cdot M_{\max} = -\frac{K \cdot M_{2(\max)}}{J_2} + \frac{K \cdot M_{\max}}{J_2} + \frac{K \cdot M_{1(\max)}}{J_1} + \frac{K \cdot M_{\max}}{J_1}$$

Ponendo:

$$\frac{K}{J_1} = \alpha \qquad \frac{K}{J_2} = \beta$$

la relazione sopra scritta assume la forma:

$$\omega_0^2 \cdot M_{\max} = -\,\beta \cdot M_{2\,(\max)} + \beta \cdot M_{\max} + \alpha \cdot M_{1\,(\max)} + \alpha \cdot M_{\max}$$

ossia:

$$M_{max} \cdot [\omega_0^2 - (\alpha + \beta)] = \alpha \cdot M_{1\,(max)} - \beta \cdot M_{2\,(max)}$$

dalla quale si ricava:

$$\boxed{M_{max} = \frac{\alpha \cdot M_{1(max)} - \beta \cdot M_{2(max)}}{\omega_0^2 - (\alpha + \beta)}} \qquad (5)$$

Il binomio:

$$\alpha + \beta = \frac{K}{J_1} + \frac{K}{J_2} = K \cdot \left(\frac{1}{J_1} + \frac{1}{J_2} \right)$$

per la (12.7) del testo, rappresenta il quadrato della pulsazione ω_e delle oscillazioni torsionali libere; di conseguenza la (5) diventa:

$$\boxed{M_{max} = \frac{\alpha \cdot M_{1(max)} - \beta \cdot M_{2(max)}}{\omega_0^2 - \omega_e^2}} \qquad (6)$$