ESAME DI STATO
DI LICEO SCIENTIFICO - SCIENTIFICO TECNOLOGICO
2014
Corso Sperimentale – Progetto Brocca
Tema di Fisica

La prova

Il candidato svolga una relazione su uno solo dei seguenti due temi, a sua scelta, prestando particolare attenzione al corretto uso della terminologia scientifica e delle cifre significative nella presentazione dei risultati numerici.

Primo tema

Arthur Compton vinse nel 1927 il premio Nobel per la Fisica per la scoperta dell'effetto che porta il suo nome.

Il candidato:

1) descriva l'effetto Compton ed analizzi le equazioni che lo caratterizzano;
2) esponga il concetto di lunghezza d'onda di Compton;
3) si soffermi sul motivo per cui l'effetto in esame è considerato una delle più importanti prove sperimentali dell'interpretazione quantistica delle radiazioni elettromagnetiche;
4) esponga, quindi, cosa si intende per aspetto corpuscolare delle radiazioni elettromagnetiche;
5) risolva infine il seguente problema:

   Un fotone urta un elettrone libero che ha una velocità iniziale che può essere considerata trascurabile. Dopo l'urto si rileva un fotone diffuso che ha un'energia pari a 101 keV e che presenta un angolo di deviazione dovuto all' effetto Compton di $30^\circ\,00'$.

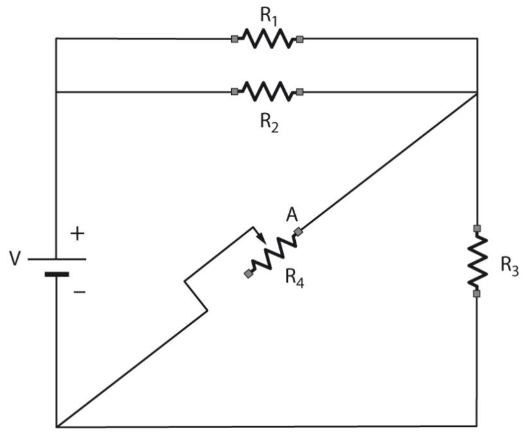
   Ricavare l'energia del fotone incidente e l'energia cinetica dell'elettrone di rimbalzo sempre espresse in eV.

Si ricorda che:
1 eV = $1{,}60 \cdot 10^{-19}$ J
$h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ J·s (costante di Planck)
$m_0 = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ kg (massa a riposo dell'elettrone)
$c = 3{,}00 \cdot 10^{8}$ m/s (velocità della luce)

Secondo tema

Nel circuito riportato in figura $V = 3{,}60 \cdot 10^2$ V, $R_1 = 1{,}20 \cdot 10^2\ \Omega$, $R_2 = 2{,}40 \cdot 10^2\ \Omega$, $R_3 = 3{,}60 \cdot 10^2\ \Omega$, R_4 è un resistore variabile di resistenza massima pari a $1{,}80 \cdot 10^2\ \Omega$.

Considerando il potenziometro costituito da un conduttore omogeneo di sezione costante e di lunghezza l calcolare quale deve essere la posizione del cursore, espressa come frazione di l, per far sì che sul resistore R_3 vengano dissipati 40,0 W per effetto Joule. La posizione deve essere valutata considerando A come punto di inizio del potenziometro.



Il candidato inoltre:

1) descriva i concetti di tensione e di corrente;
2) dia una definizione delle unità di misura delle grandezze utilizzate per risolvere il problema proposto;
3) descriva la prima e la seconda legge di Ohm;
4) descriva l'effetto Joule dandone anche una interpretazione microscopica;
5) descriva il fenomeno della conduzione nei metalli e lo metta a confronto con il comportamento degli isolanti.

La soluzione

Primo tema

L'effetto Compton

Nel redigere la risposte per questo punto, abbiamo in parte ripreso il testo della discussione delle prove d'esame relative all'anno 2002 e 2008.

L'effetto Compton è osservabile mediante il seguente apparato sperimentale: una sorgente di raggi X viene usata per irraggiare un bersaglio di grafite; un apposito rivelatore raccoglie i raggi X diffusi al di là del bersaglio e ne misura la lunghezza d'onda. Si osserva che la lunghezza d'onda λ' della frazione più significativa dei raggi X diffusi è *maggiore* della lunghezza d'onda λ dei raggi incidenti.

La relazione tra le lunghezze d'onda λ e λ' è espressa dalla formula

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{m_0 \cdot c}(1 - \cos\varphi) \tag{1}$$

dove m_0 rappresenta la massa a riposo dell'elettrone, mentre φ è l'angolo di diffusione fra la direzione dei fotoni X incidenti e quella dei fotoni diffusi.

Compton propose di spiegare la variazione della lunghezza d'onda considerando l'interazione fra i raggi X e gli elettroni della grafite come un urto elastico fra un fotone e un elettrone. Come dice anche il testo del tema, la velocità iniziale dell'elettrone è trascurabile, mentre indichiamo con $\vec{v}$ la sua velocità vettoriale finale.

In un urto elastico, che rispetta il principio di conservazione dell'energia, la somma delle energie finali del fotone e dell'elettrone è uguale alla somma delle corrispondenti energie iniziali. Utilizzando la relazione di Einstein $\mathcal{E} = hf$, se indichiamo rispettivamente le frequenze del fotone incidente e di quello diffuso con $f = c/\lambda$ e con $f' = c/\lambda'$ possiamo allora scrivere una prima condizione:

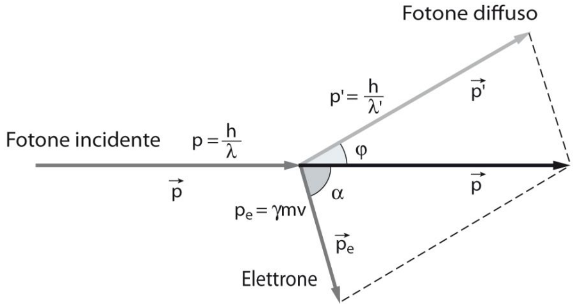
$$m_0c^2 + h\frac{c}{\lambda} = \gamma m_0 c^2 + h\frac{c}{\lambda'}, \tag{2}$$

dove il fattore di dilatazione (o fattore di Lorentz) γ è dato dall'espressione

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \tag{3}$$

Vale la pena di notare che la differenza $\gamma m_0 c^2 - m_0 c^2 = (\gamma - 1)m_0 c^2$, tra le energie finale e iniziale dell'elettrone, è per definizione uguale all'energia cinetica dell'elettrone diffuso.

Inoltre Compton impose, nell'urto, la conservazione della quantità di moto totale; nella figura seguente φ e α sono gli angoli di deviazione del fotone e dell'elettrone.



Allora la conservazione della quantità di moto nella direzione del fotone iniziale porta alla condizione

$$\frac{h}{\lambda} = \gamma m v \cos\alpha + \frac{h}{\lambda'} \cos\varphi, \tag{4}$$

mentre la conservazione della corrispondente componente ortogonale richiede che valga

$$\frac{h}{\lambda'} \sin\varphi = \gamma m v \sin\alpha. \tag{5}$$

Nelle due precedenti relazioni si è ricordata l'equazione

$$\vec{p}_r = \gamma m_0 \vec{v} \tag{6}$$

per la quantità di moto relativistica dell'elettrone e si è espresso il modulo della quantità del fotone iniziale come

$$p = \frac{\mathcal{E}}{c} = \frac{hf}{c} = h\frac{c}{\lambda} \cdot \frac{1}{c} = \frac{h}{\lambda}. \tag{7}$$

Ovviamente, una relazione analoga, che contiene λ' al posto di λ, vale per il modulo della quantità di moto del fotone diffuso.

Partendo da queste tre leggi di conservazione, Compton ricavò la formula (1), che risultava così giustificata sperimentalmente.

La lunghezza d'onda di Compton

Una proprietà notevole della relazione di Compton (1) è che la variazione di lunghezza d'onda non dipende dalla lunghezza d'onda del fotone incidente; invece essa è direttamente proporzionale al fattore

$$\lambda_C \equiv \frac{h}{m_0 \cdot c}, \tag{8}$$

detto *lunghezza d'onda di Compton*. Per l'elettrone il valore numerico di λ_C è

$$\lambda_C = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \mathrm{J \cdot s}}{(9{,}11 \cdot 10^{-31}\ \mathrm{kg}) \cdot \left(3{,}00 \cdot 10^{8}\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)} = 2{,}43 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{m}. \tag{9}$$

Dalla formula (1) si vede che λ_C è il valore di $\Delta\lambda$ che si ottiene quando l'angolo di diffusione è uguale a 90°. In modo equivalente, i valori matematicamente possibili di $\Delta\lambda$ (con $0 \le \varphi \le 180°$) sono compresi tra 0 e $2\lambda_C$.

Infine possiamo considerare un fotone che ha un'energia pari all'energia di riposo di un elettrone; dalla relazione

$$h\frac{c}{\lambda} = m_0 c^2 \tag{10}$$

che ne risulta, otteniamo

$$\lambda = \frac{h}{m_0 c} = \lambda_C \tag{11}$$

e quindi scopriamo che la lunghezza d'onda di Compton è la lunghezza d'onda di un fotone con $\mathcal{E} = m_0 c^2$.

Interpretazione dell'effetto Compton

La risposta alla domanda è implicita nelle considerazioni svolte rispondendo al punto 1): Arthur Compton ipotizzò che, nella situazione sperimentale in questione, il fascio di raggi X si potesse considerare composto di un grande numero di entità individuali (quelle che noi chiamiamo *fotoni*), ciascuna capace di interagire con le particelle della materia comportandosi essa stessa come una particella.

Inoltre, per giungere al suo risultato Compton utilizzò con successo le due relazioni ipotizzate da Einstein: che l'energia del fotone fosse $\mathcal{E} = hf$ e che il modulo della sua quantità di moto fosse dato da $p = hf/c = h/\lambda$.

Aspetto corpuscolare della radiazione elettromagnetica

Tornando alla risposta della richiesta 1) sottolineiamo in particolare che, nell'interazione fotone-elettrone, si conservano sia l'energia, sia la quantità di moto vettoriale. È la stessa cosa che accade in un urto tra due elementi a cui non abbiamo difficoltà ad attribuire caratteristiche corpuscolari, per esempio un elettrone e un protone. Bisogna quindi ammettere che, in determinate condizioni sperimentali, la radiazione elettromagnetica abbia aspetti e comportamenti corpuscolari. Vale qui la pena di ricordare che questa consapevolezza è giunta per gradi.

Da almeno due secoli l'esperimento di Young ha messo in luce le proprietà ondulatorie della luce e da circa un secolo e mezzo sappiamo che la luce è un'onda elettromagnetica. Però all'inizio del diciannovesimo secolo le proprietà dello spettro di emissione del corpo nero risultarono impossibili da spiegare utilizzando la teoria ondulatoria di Maxwell. Allo stesso modo, le caratteristiche sperimentali dell'effetto fotoelettrico si rivelarono incompatibili con le proprietà ondulatorie della luce.

È ben noto che questa situazione portò all'ipotesi di Max Planck secondo cui la radiazione scambia energia con la materia in quantità discrete, date dalla formula $\Delta\mathcal{E} = nhf$, dove n è un intero positivo; e che in un secondo momento Albert Einstein fu in grado di interpretare le caratteristiche dell'effetto fotoelettrico ipotizzando l'esistenza di quanti di luce con energia $\mathcal{E} = hf$, che interagiscono individualmente con gli elettroni. Questa linea di pensiero trova quindi la conferma finale e più convincente nell'esperimento di Arthur Compton.

Per una presentazione più approfondita e rigorosa del corpo nero e dell'effetto fotoelettrico si può fare riferimento, per esempio, alla risoluzione pubblicata nel 2012.

Risoluzione del problema

L'energia $\mathcal{E}' = 101$ keV equivale a

$$\mathcal{E}' = 1{,}01 \cdot 10^5 \text{ eV} = (1{,}01 \cdot 10^5 \text{ eV}) \cdot \left(1{,}60 \cdot 10^{-19} \frac{\text{J}}{\text{eV}}\right) = 1{,}62 \times 10^{-14}\,\text{J}. \tag{12}$$

A questa energia corrisponde una lunghezza d'onda λ' pari a

$$\lambda' = \frac{hc}{\mathcal{E}'} = \frac{(6{,}63 \cdot 10^{-34}\,\text{J}\cdot\text{s}) \cdot \left(3{,}00 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)}{1{,}62 \times 10^{-14}\,\text{J}} = 1{,}23 \cdot 10^{-11} \text{ m}. \tag{13}$$

Allora dalla formula (1) otteniamo la lunghezza d'onda λ del fotone incidente, che risulta

$$\lambda = \lambda' - \lambda_C(1 - \cos 30°) = 1{,}23 \cdot 10^{-11} \text{ m} - 2{,}43 \cdot 10^{-12} \text{ m} \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1{,}20 \cdot 10^{-11} \text{ m}. \tag{14}$$

L'energia E che corrisponde alla lunghezza d'onda trovata è

$$\mathcal{E} = \frac{hc}{\lambda} = \frac{(6{,}63 \cdot 10^{-34}\,\text{J}\cdot\text{s}) \cdot \left(3{,}00 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)}{1{,}20 \cdot 10^{-11} \text{ m}} = 1{,}66 \times 10^{-14}\,\text{J}. \tag{15}$$

Questa energia corrisponde a

$$\mathcal{E} = \frac{1{,}66 \times 10^{-14}\,\text{J}}{1{,}60 \cdot 10^{-19} \frac{\text{J}}{\text{eV}}} = 104 \text{ keV}. \tag{16}$$

Quindi, per la precedente relazione (2), l'energia cinetica K dell'elettrone diffuso risulta essere

$$K = \mathcal{E} - \mathcal{E}' = 104 \text{ keV} - 101 \text{ keV} = 3 \text{ keV}. \tag{17}$$

Secondo tema

Risoluzione del problema

Il testo stabilisce che il resistore con resistenza R_3 dissipa una potenza P_3 = 40,0 W. Dalla relazione

$$P_3 = \frac{V_3^2}{R_3} \tag{18}$$

e sapendo che $R_3 = 3{,}60 \times 10^2\ \Omega$ possiamo trovare che la differenza di potenziale ai capi di R_3 ed R_4 vale

$$V_3 = \sqrt{P_3 R_3} = \sqrt{(40{,}0\ \text{W}) \cdot (3{,}60 \times 10^2\ \Omega)} = 120\text{V}. \tag{19}$$

Ciò significa che ai capi di R_1 e di R_2 ci deve essere una differenza di potenziale V_1 data da

$$V_1 = V - V_3 = 360\ \text{V} - 120\ \text{V} = 240\ \text{V}. \tag{20}$$

Le resistenze R_1 ed R_2 sono in parallelo tra loro e quindi sono equivalenti a un'unica resistenza

$$R_{12} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{(120\ \Omega) \cdot (240\ \Omega)}{120\ \Omega + 240\ \Omega} = 80{,}0\ \Omega. \tag{21}$$

Quindi l'intensità di corrente equivalente i_{eq} che attraversa R_1 ed R_2 vale

$$i_{eq} = \frac{V_1}{R_{12}} = \frac{240\ \text{V}}{80{,}0\ \Omega} = 3{,}00\ \text{A}. \tag{22}$$

La stessa intensità di corrente attraversa anche il resistore equivalente di R_3 ed R_4 in parallelo tra loro. Se indichiamo con R_{34} tale resistore, dai dati precedenti troviamo

$$R_{34} = \frac{V_3}{i_{eq}} = \frac{120\ \text{V}}{3{,}00\ \text{A}} = 40{,}0\ \Omega. \tag{23}$$

Per finire, il resistore R_{34} si ottiene anche come

$$R_{34} = \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4}. \tag{24}$$

Da questa relazione otteniamo

$$R_4 = \frac{R_3 R_{34}}{R_3 - R_{34}} = \frac{(360\ \Omega) \cdot (40{,}0\ \Omega)}{360\ \Omega - 40{,}0\ \Omega} = 45{,}0\ \Omega. \tag{25}$$

Questo valore è esattamente un quarto del valore massimo di R_4. Dal momento che, come sarà spiegato meglio in seguito, la resistenza di un filo omogeneo è direttamente proporzionale alla sua lunghezza, siamo giunti alla conclusione che sul resistore R_4 il cursore indicato nella figura è posto nella posizione $l/4$.

La tensione e la corrente

È data una carica di prova q che, spostandosi dal punto A al punto B, subisce una variazione di energia potenziale elettrica $U_B - U_A$. Allora, per definizione, si chiama differenza di potenziale (o tensione) $\Delta V = V_B - V_A$ il rapporto

$$V_B - V_A = \frac{U_B - U_A}{q}. \tag{26}$$

Possiamo indicare con $\Delta\vec{l}$ il vettore spostamento che congiunge i punti A e B. Se nella zona che contiene tali punti esiste un campo elettrico uniforme $\vec{E}$, ricordiamo la definizione $U_B - U_A = -q\vec{E}\cdot\Delta\vec{l}$ e ricaviamo

$$V_B - V_A = \frac{U_B - U_A}{q} = \frac{-q\vec{E}\cdot\Delta\vec{l}}{q} = -\vec{E}\cdot\Delta\vec{l}. \tag{27}$$

Per definizione, una *corrente elettrica* è un moto ordinato di cariche elettriche. Probabilmente, però, l'autore della prova intendeva chiedere la definizione dell'*intensità di corrente elettrica* i, definita come

$$i = \frac{\Delta Q}{\Delta t}, \tag{28}$$

dove ΔQ è la quantità di carica che, nell'intervallo di tempo Δt, attraversa una sezione trasversale del conduttore in esame.

A rigore la formula (28) fornisce l'intensità media di corrente nell'intervallo Δt. Per trovare l'intensità istantanea di corrente elettrica occorre operare il limite per Δt che tende a zero del quoziente (28). Si trova così che l'intensità di corrente elettrica è la derivata temporale della carica che attraversa la data sezione del conduttore.

Definizione delle unità di misura

Dando per scontate le definizioni delle unità di misura fondamentali e derivate della meccanica, nel Sistema Internazionale:

- partendo dalla forza di Ampère, si definisce l'intensità di corrente di 1 A come quella intensità di corrente che, fluendo in due fili rettilinei indefiniti distanti 1 m, porta ad esercitare una forza di intensità pari a $2\cdot 10^{-7}$ N su ogni tratto lungo 1 m dei due fili;
- si definisce 1 C = (1 A) · (1 s);
- si definisce 1 V = (1 J)/(1 C);
- si definisce 1 Ω = (1 V)/(1 A).

Le leggi di Ohm

La prima legge di Ohm stabilisce che per un'ampia classe di conduttori la differenza di potenziale ΔV ai capi del conduttore stesso e l'intensità di corrente i che ne deriva sono direttamente proporzionali. Ciò è equivalente a dire che la curva caratteristica del conduttore in esame (detto conduttore ohmico) è una retta passante per l'origine.

Questa proprietà viene espressa mediante la relazione

$$\Delta V = R\,i, \tag{29}$$

dove la costante di proporzionalità R si chiama *resistenza* del conduttore ed è una quantità che caratterizza il conduttore stesso. Come è stato spiegato in precedenza, nel Sistema Internazionale la resistenza si misura in *ohm* (Ω).

La seconda legge di Ohm si applica a un conduttore ohmico di forma regolare, con lunghezza l e area A della sezione trasversale. La legge stabilisce che la resistenza R di tale conduttore è direttamente proporzionale a l e inversamente proporzionale ad A attraverso la relazione

$$R = \rho\frac{l}{A}. \tag{30}$$

L'ulteriore costante di proporzionalità ρ è detta *resistività*, si misura in Ω·m ed è una caratteristica del materiale conduttore di cui è fatta la resistenza e della temperatura a cui esso si trova.

L'effetto Joule

Per rispondere al quesito riportiamo in parte la trattazione del 2006.

L'effetto Joule è il fenomeno per il quale il passaggio di corrente all'interno di un conduttore determina un aumento di temperatura di quest'ultimo. L'aumento di temperatura dipende da vari fattori, fra cui la capacità termica del conduttore, la possibilità che esso ceda calore all'ambiente, l'intervallo di tempo preso in esame, e in particolar modo la differenza di potenziale ai capi del conduttore e la corrente stabilita su di esso.

Una pila, e in generale un generatore di tensione, forniscono energia ai portatori di carica che circolano in un conduttore. Possiamo immaginare che in una pila, a circuito aperto, esista ai due morsetti una certa quantità di carica statica non bilanciata, di segno opposto. Una distribuzione di cariche di questo tipo possiede evidentemente un'energia potenziale elettrica, dato che è possibile accelerare i portatori di carica permettendo loro di raggiungere le cariche di segno opposto.

Quando si chiude il circuito avviene appunto questo. I portatori di carica (in un conduttore metallico, ad esempio, si tratta di elettroni) si muovono lungo il circuito sotto l'azione del campo elettrico generato dalla distribuzione di cariche: così facendo trasformano energia potenziale in energia cinetica, la quale viene poi trasformata in energia interna del conduttore negli urti disordinati fra gli elettroni e il reticolo cristallino. Tale aumento di energia interna si manifesta attraverso un aumento di temperatura del conduttore stesso: per effetto della corrente che è presente in esso, il conduttore si scalda. Questa spiegazione dell'effetto Joule ricorre esclusivamente a concetti classici, ma resta in prima approssimazione molto utile.

In relazione all'effetto Joule possiamo calcolare anche la potenza dissipata, che è definita come il rapporto fra una variazione di energia (che può avere luogo perché un sistema guadagna o perde energia, o perché l'energia di un sistema passa da una forma ad un'altra) e l'intervallo di tempo in cui essa avviene:

$$P = \frac{\Delta\mathcal{E}}{\Delta t}. \tag{31}$$

Consideriamo ora un conduttore ai cui estremi è mantenuta una differenza di potenziale di valore assoluto pari a V e che è percorso da una corrente continua di intensità i. Dalle relazioni (26) e (28), quando una carica $q = i\Delta t$ passa da un estremo all'altro del conduttore, l'energia emessa è

$$\Delta\mathcal{E} = qV = iV\,\Delta t, \tag{32}$$

per cui la potenza dissipata risulta

$$P = \frac{\Delta\mathcal{E}}{\Delta t} = \frac{iV\,\Delta t}{\Delta t} = iV. \tag{33}$$

nel caso particolare di un conduttore ohmico di resistenza R la formula precedente può essere scritta anche come

$$P = iV = Ri^2 = \frac{V^2}{R}. \tag{34}$$

La conduzione nei metalli

Non è chiaro come si debba rispondere alla domanda.

Da un punto di vista elementare si può affermare che in un isolante non ci sono portatori di carica libera. Al contrario, invece, in un conduttore devono esistere cariche libere di muoversi. In particolare, in un metallo questi portatori di carica mobili sono gli elettroni di conduzione, che si comportano come un gas di particelle libere all'interno di un reticolo cristallino di ioni positivi.

Se all'interno del metallo non vi è un campo elettrico, il moto di agitazione ternica degli elettroni non produce uno spostamento medio netto delle cariche, per cui non si ha nessuna corrente elettrica.

Invece, la presenza di un campo elettrico influisce sul moto degli elettroni di conduzione e determina la creazione di una corrente. Questo modello è stato per necessità già richiamato nella risposta precedente, per fornire un'interpretazione microscopica dell'effetto Joule.

D'altronde, la richiesta di un confronto tra la conduzione nei metalli e il comportamento degli isolanti porta a pensare al modello a bande di energia dei solidi. Nei conduttori metallici la banda di valenza è riempita solo parzialmente; altrimenti può accadere che esista una banda di valenza sovrapposta a una di conduzione. In questo modo gli elettroni possono muoversi facilmente passando da un livello all'altro.

In un isolante, invece, la banda di valenza (completamente piena) e quella di conduzione (libera) sono separate da una banda proibita (*gap*) di ampiezza rilevante. In questo modo gli elettroni non si possono spostare e quindi la conduzione elettrica non è permessa.