

ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO 2004

Indirizzo Scientifico Progetto Brocca

Trascrizione del testo e redazione delle soluzioni di Paolo Cavallo.

La prova

Il candidato svolga una relazione su uno solo dei seguenti due temi, a sua scelta, motivando i passaggi intermedi e prestando attenzione al corretto uso della terminologia scientifica.

Primo tema

Se si scalda l'estremità di una barra di ferro, si nota che essa emette inizialmente una radiazione termica che è percepita dalla pelle ma non dagli occhi. Se si continua a far aumentare la temperatura, l'estremità della barra diventa luminosa; il colore è prima rosso e poi, aumentando ancora la temperatura, tende al bianco.

Il candidato risponda ai seguenti quesiti.

1. Analizzare il fenomeno descritto e fornire una spiegazione fisica delle varie fasi che portano dalla iniziale emissione termica a quella luminosa, prima rossa e poi bianca.
2. Collegare il fenomeno descritto alle ricerche riguardanti la curva d'emissione della radiazione elettromagnetica del corpo nero che portarono Planck, nel 1900, a formulare l'ipotesi del quanto di energia. Descrivere il problema affrontato da Planck e la sua ipotesi finale.
3. Descrivere l'evoluzione del concetto di quanto di energia fino ad arrivare al concetto di fotone, introdotto da Einstein, e utilizzato nel 1905 per spiegare l'effetto fotoelettrico e, successivamente, l'effetto Compton. Fornire una spiegazione fisica dei due effetti.
4. Calcolare, in eV e in J, l'energia trasportata da un fotone proveniente da una lampada che emette luce gialla di lunghezza d'onda $\lambda = 600$ nm.
5. Una piccola lastra di rame, di massa $m = 20$ g e calore specifico $c = 0,092$ kcal/(kg · °C), aumenta la sua temperatura di 2 °C perché investita dalla radiazione infrarossa proveniente da una stufa. Sapendo che la frequenza della radiazione è $\nu = 3 \cdot 10^{13}$ Hz, calcolare il numero dei fotoni che hanno interagito con il rame provocandone il riscaldamento.

(Si ricordano i seguenti valori approssimati della velocità della luce e della costante di Planck: $c = 3 \cdot 10^8$ m/s; $h = 6,6 \cdot 10^{-34}$ J · s)

Secondo tema

Le immagini che si formano sullo schermo di un apparecchio televisivo sono generate dall'interazione tra un fascio di elettroni veloci e i fosfori depositati sulla superficie interna dello schermo stesso. Gli elettroni provengono dalla sezione posteriore del tubo catodico dove un filamento metallico è portato all'incandescenza.

Il candidato risponda alle seguenti domande.

1. Spieghi perché l'alta temperatura del filamento favorisce l'emissione di elettroni.
2. Spieghi perché i fosfori depositati sulla superficie dello schermo emettono luce quando interagiscono con gli elettroni veloci del tubo catodico.
3. Nella figura 1a. è schematicamente rappresentato un tubo catodico nel quale sono visibili: due generatori di tensione continua (G1 per l'alta tensione e G2 per la bassa tensione), il filamento riscaldato (*Fil*), il collimatore del fascio elettronico (*Coll*) formato da due piastrine metalliche forate e parallele, lo schermo S, la zona Z dove gli elettroni sono deviati da un campo magnetico. Il candidato descriva e commenti:
 - (a) le funzioni e le polarità dei generatori G1 e G2;
 - (b) in quale zona del tubo catodico l'intensità del campo elettrico è elevata e dove, invece, è trascurabile.
4. Nell'ipotesi che la differenza di potenziale tra il filamento e il collimatore sia $\Delta V = 30$ kV, il candidato calcoli:
 - (a) l'energia cinetica acquistata dagli elettroni nel loro percorso tra *Fil* e *Coll*, espressa in elettronvolt e in joule;
 - (b) la velocità degli elettroni al loro passaggio attraverso il collimatore (ipotesi classica), commentando il risultato per quanto riguarda gli eventuali effetti relativistici.

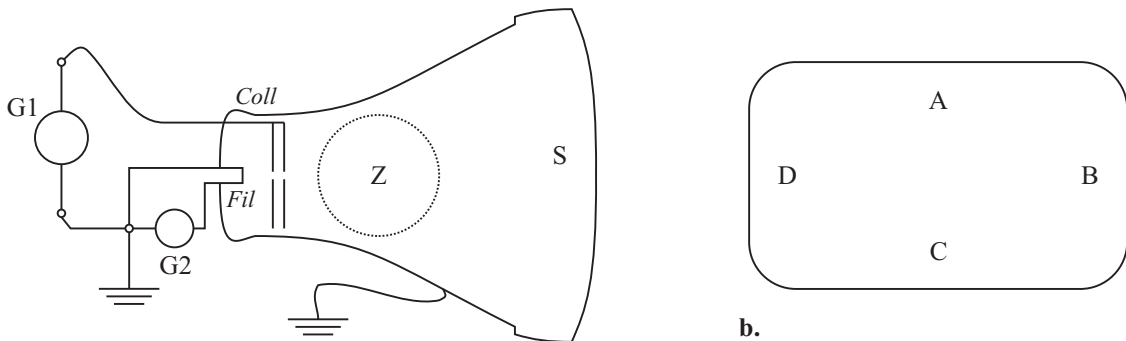


Fig. 1

a.

b.

5. Con riferimento alla figura 1b., che rappresenta la vista anteriore dello schermo, e nell'ipotesi che il campo magnetico nella zona Z sia uniforme, il candidato disegni il vettore \vec{B} necessario, ogni volta, per far raggiungere al fascio di elettroni i punti A, B, C, D sullo schermo.
6. Il candidato si riferisca ora alla figura 2 dove tt è la traiettoria del fascio elettronico, r è il raggio dell'arco di traiettoria compiuto all'interno di Z, δ è l'angolo di deviazione del fascio elettronico. Si supponga che l'angolo di deviazione sia $\delta = 30^\circ$ e che il campo magnetico sia uniforme all'interno della zona sferica Z, di raggio $R_Z = 4$ cm, e nullo

altrove. Il candidato calcoli l'intensità del vettore \vec{B} che porta a tale angolo di deviazione e ne indichi la direzione e il verso, osservando che lo schermo è perpendicolare al piano del foglio.

Nella figura 2 l'angolo δ è stato disegnato più grande di 30° con lo scopo di rendere l'immagine più compatta per facilitarne lo studio.

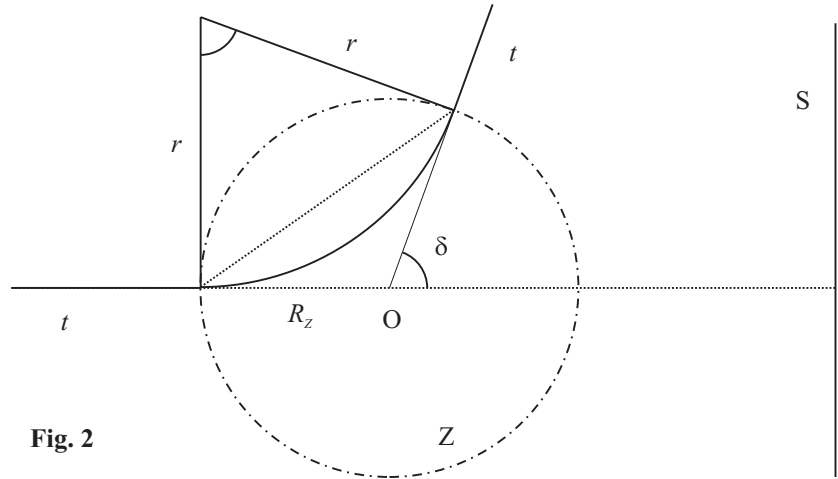


Fig. 2

Si ricordano i seguenti dati approssimati:

- carica dell'elettrone $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C
- massa dell'elettrone $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}$ kg
- velocità della luce $c = 3,0 \cdot 10^8$ m/s

La soluzione

Primo tema

L'irraggiamento termico

Dal testo del primo quesito non è facile stabile che cosa intenda l'estensore con le espressioni "analizzare il fenomeno descritto" e "fornire una spiegazione fisica". Ci sono infatti almeno due strade possibili:

Le leggi del corpo nero Una barra di ferro riscaldata emette una radiazione elettromagnetica che è il risultato di due contributi distinti: la frazione di radiazione incidente riflessa dalla barra, e la radiazione termica tipica di un corpo nero¹ che si trovi alla stessa temperatura. Se questo secondo contributo è dominante, in termini di potenza irraggiata, possiamo trascurare il primo e trattare la barra incandescente come un corpo nero. In questa ipotesi, il fenomeno è descritto fisicamente da due leggi:

1. la legge di Stefan–Boltzmann, dimostrabile a partire dai principi della termodinamica, afferma che la potenza emessa per unità di area da un corpo nero alla temperatura assoluta T è direttamente proporzionale alla quarta potenza di T :

$$I = \sigma T^4 \quad (1)$$

dove σ è una costante universale e vale $\pi^2 k^4 / 60 \hbar^3 c^2 = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K}^4)$; all'aumentare della temperatura, quindi, l'intensità della radiazione di corpo nero emessa dalla barra aumenta molto rapidamente, giustificando così l'ipotesi che sia possibile trattare la barra stessa come un corpo nero, se la temperatura è elevata;

2. la legge di spostamento di Wien, inizialmente enunciata come legge sperimentale, poi giustificata in base alla teoria quantistica della radiazione, afferma che la temperatura T di un corpo nero e la lunghezza d'onda λ_{max} , corrispondente alla massima frazione di potenza emessa, sono inversamente proporzionali; si può scrivere:

$$b = \lambda_{max} T \quad (2)$$

dove $b = 2,898 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K}$; la legge di Wien indica che, all'aumentare della temperatura, il massimo di emissione si sposta a lunghezze d'onda sempre più piccole, ovvero a frequenze sempre più elevate; è a questo "spostamento" che si deve il fatto che la barra emette dapprima radiazione infrarossa (percepita dalla pelle come calore, ma non dagli occhi) a temperature relativamente basse, quindi luce rossa a temperature più alte; quando la temperatura aumenta ancora, poi, il massimo di emissione si sposta e la barra inizia ad emettere apprezzabilmente anche all'estremo azzurro–violetto dello spettro visibile, apparendo perciò bianca.

L'emissione di luce da parte degli atomi Un altro approccio al fenomeno dell'incandescenza, meno rigoroso, ma più attento al meccanismo microscopico di emissione di radiazioni elettromagnetiche da parte della materia, può essere tentato in analogia con l'emissione della luce da parte dei gas. Scaldando un gas, in effetti, si ottiene l'emissione di luce e di altre radiazioni elettromagnetiche. Questo, secondo la teoria quantistica, perché gli atomi del gas acquistano energia negli urti disordinati dovuti all'agitazione termica e, se l'energia scambiata è sufficiente, l'atomo può passare dal livello energetico fondamentale a un livello eccitato; subito dopo esso torna al livello fondamentale, emettendo un fotone di energia pari alla differenza di energia fra i livelli. La frequenza della luce emessa dipende quindi dalla particolare transizione fra livelli che ha luogo. Una prima spiegazione di questo processo fu data nel 1913, per quanto riguarda l'atomo di idrogeno, da Niels Bohr.

¹Per il concetto di corpo nero si rimanda alla discussione del quesito seguente.

All'aumentare della temperatura, aumenta il numero dei livelli accessibili e quindi il numero delle frequenze emesse dal gas. Si ottiene il ben noto *spettro a righe* tipico dei gas.

La differenza fondamentale fra l'emissione di luce da parte dei gas e l'incandescenza di un solido è il carattere *continuo* dello spettro emesso in quest'ultimo caso. La radiazione emessa da un solido caldo, infatti, non contiene soltanto certe frequenze, come nel caso dei gas, ma tutte le frequenze comprese in un certo intervallo. Non è difficile capire che questa differenza è dovuta al fatto che i livelli energetici disponibili nel caso di un solido, formato da un numero enorme di atomi legati insieme, sono molto diversi da quelli di un atomo singolo. In particolare, si può mostrare che i livelli formano *bande* costituite da un enorme numero di livelli energetici estremamente vicini fra loro. Le transizioni possibili sono perciò moltissime, e allo stesso modo sono moltissime le frequenze emesse, che vanno così a formare uno *spettro continuo*.

Planck e il corpo nero

In fisica si definisce *corpo nero* un corpo qualsiasi che abbia la proprietà di assorbire tutta la radiazione elettromagnetica incidente su esso, senza rifletterla affatto. Un corpo nero emette perciò radiazione soltanto in virtù della sua temperatura, secondo la legge di Stefan-Boltzmann.

Lo studio sperimentale dell'emissione termica del corpo nero, negli ultimi decenni dell'Ottocento, mise in evidenza che la potenza emessa dall'unità di area di un corpo nero a una data temperatura variava con la frequenza secondo un andamento caratteristico, descritto dalla curva qui riprodotta.



Figura 1: Curva di emissione del corpo nero

Questa curva rappresenta una *funzione di distribuzione*. L'ordinata non fornisce il valore della potenza emessa a una determinata frequenza, ma il numero che occorre moltiplicare per il piccolo intervallo df di frequenza considerato per ottenere la potenza emessa nell'intervallo

di frequenze che va da f a $f + df$. L'area compresa tra la curva e l'asse delle ascisse corrisponde alla potenza totale emessa (sempre per unità di area).

Come si vede, la curva presenta un picco, che corrisponde alla λ_{max} che compare nella legge di spostamento di Wien.

La curva (1) rappresentò un problema irrisolvibile per la fisica classica. Tutti gli sforzi per dedurre dall'elettromagnetismo di Maxwell un'espressione per la potenza irradiata conducevano infatti a un risultato inaccettabile: la potenza doveva aumentare senza limiti all'aumentare della frequenza. È facile capire che, se ciò fosse vero, la potenza totale emessa, cioè l'area sotto la curva, dovrebbe risultare infinita. In altri termini, un corpo nero (e anche una barra di ferro riscaldata) dovrebbe emettere una quantità infinita di energia.

Alla fine dell'Ottocento, Planck affrontò questo problema e nel 1900 riuscì a dimostrare che era possibile ottenere un'espressione matematica in ottimo accordo con la curva sperimentale introducendo un'ipotesi supplementare: che gli scambi di energia fra la materia e la radiazione a una data frequenza non avvengano per quantità arbitrarie, variabili con continuità, ma soltanto per *quanti discreti*, multipli interi di un quanto di energia elettromagnetica di valore hf . La costante universale h è detta *costante di Planck* e vale $(6,62606876 \pm 0,00000052) \text{ J} \cdot \text{s}$ secondo misure recenti.

Einstein e i quanti di luce

L'ipotesi di Planck fu ripresa da Einstein in un celebre articolo del 1905 sull'effetto fotoelettrico. (Si tratta dell'articolo che gli valse il premio Nobel nel 1922. Il 2005, anniversario dei cento anni della pubblicazione di quell'articolo e di altri, fra i quali gli articoli che segnarono la nascita della teoria della relatività, è stato proclamato anno mondiale della fisica.)

Qui di seguito si riproduce quanto già scritto nella discussione della prova d'esame del 1997.

L'effetto fotoelettrico può essere messo in evidenza utilizzando un opportuno tubo a vuoto con due elettrodi connessi a una pila che mantiene fra essi una differenza di potenziale assegnata. Poiché i due elettrodi sono isolati, nel circuito così costituito non passa alcuna corrente. Ma se il catodo (l'elettrodo connesso al polo negativo della pila) è costituito da una piastrina metallica, è possibile far passare una corrente nel circuito illuminando il catodo con una sorgente di radiazione elettromagnetica, visibile o ultravioletta. Finché la lunghezza d'onda della radiazione impiegata è *superiore* a un certo valore λ_0 , detto lunghezza d'onda di soglia, nel circuito non si osserva alcuna corrente, qualunque sia l'intensità della sorgente impiegata. La corrente passa soltanto se la radiazione ha una lunghezza d'onda uguale o inferiore a λ_0 .

Dal punto di vista dell'elettromagnetismo classico, questo effetto è sconcertante. Se nel circuito si stabilisce una corrente, possiamo ipotizzare che il catodo illuminato emetta elettroni, in maniera simile a quello che avviene nell'effetto termionico. L'energia necessaria ad abbandonare il catodo, indicata come *funzione lavoro* W , deve evidentemente essere fornita agli elettroni dalla radiazione incidente. Ma secondo l'elettromagnetismo classico l'energia della radiazione non dipende dalla lunghezza d'onda. In altri termini, con una sorgente di radiazione abbastanza intensa, si dovrebbe osservare un passaggio di corrente per qualunque valore della lunghezza d'onda. L'esistenza di un effetto di soglia resta inspiegabile.

L'effetto fotoelettrico fu spiegato da Einstein nel 1905 in base all'ipotesi dei quanti di luce, già avanzata in altra forma da Planck cinque anni prima a proposito del problema del corpo nero. Planck aveva proposto di *quantizzare* gli scambi di energia fra radiazione e materia, ipotizzando che essi potessero avvenire soltanto per multipli di un'energia minima, data dal prodotto della costante h (oggi nota come *costante di Planck*) per la frequenza f della radiazione. Einstein estende l'ipotesi di Planck, proponendo di quantizzare la radiazione stessa e di considerarla come composta di *quanti di luce* aventi energia hf . Indicheremo questi quanti

con il nome di *fotoni*, assegnato loro soltanto in seguito. Ogni fotone ha quindi un'energia:

$$E_f = h f = \frac{h c}{\lambda}. \quad (3)$$

Einstein propose il seguente modello. Quando un fotone colpisce un elettrone nel metallo che costituisce il catodo, gli cede la propria energia $h f$. Se la frequenza del fotone è troppo bassa (ovvero, se la lunghezza d'onda è troppo alta), l'energia ceduta all'elettrone è inferiore a W e l'elettrone resta confinato nel metallo, dove negli urti con il reticolo cristallino perde immediatamente l'energia acquistata. Se invece f è uguale o superiore a una frequenza di soglia f_0 (ovvero, se λ è uguale o inferiore a $\lambda_0 = c/f_0$) l'elettrone acquista un'energia almeno sufficiente a lasciare il metallo e a muoversi nel campo elettrico esterno stabilito dalla pila. La condizione che determina λ_0 è allora semplicemente:

$$W = \frac{h c}{\lambda_0}. \quad (4)$$

A proposito dell'effetto Compton si riproduce quanto già scritto nella discussione della prova d'esame del 2002.

L'effetto Compton è osservabile mediante il seguente apparato sperimentale: una sorgente di raggi X viene usata per irraggiare un bersaglio di grafite; un apposito rivelatore raccoglie i raggi X diffusi al di là del bersaglio e ne misura la lunghezza d'onda. Si osserva che la lunghezza d'onda λ' dei raggi X diffusi è *maggiore* della lunghezza d'onda λ dei raggi incidenti.

Compton propose di spiegare la variazione della lunghezza d'onda considerando l'interazione fra i raggi X e gli elettroni della grafite come un urto elastico fra un fotone e un elettrone. Scrivendo i principi di conservazione dell'energia e della quantità di moto totali (in forma relativistica, data la presenza del fotone), e risolvendo il sistema di equazioni corrispondente, Compton ottenne l'espressione:

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_0 \cdot c} (1 - \cos \theta) \quad (5)$$

dove m_0 rappresenta la massa a riposo dell'elettrone, mentre θ è l'angolo di diffusione fra la direzione dei fotoni X incidenti e quella dei fotoni diffusi.

L'ottimo accordo fra i dati sperimentali e l'espressione proposta da Compton convinse definitivamente la comunità dei fisici della validità del modello corpuscolare della luce proposto da Einstein.

Sempre dalla discussione del 2002, si possono ripetere le conclusioni, che riassumono in termini di analogie e differenze l'evoluzione del concetto di quanto di energia fino al concetto di fotone:

- somiglianze: sia Planck che Einstein superano l'elettromagnetismo classico, riconoscendo che per spiegare un insieme di fatti sperimentali (il comportamento del corpo nero e l'effetto fotoelettrico) è inevitabile introdurre una forma di *quantizzazione* dell'energia;
- differenze: mentre Planck quantizza soltanto gli scambi energetici fra materia e radiazione, lasciando alla radiazione stessa il carattere continuo che le attribuisce l'elettromagnetismo classico, Einstein quantizza la radiazione stessa, proponendo esplicitamente di unificare dal punto di vista corpuscolare la descrizione della materia e della radiazione.

I fotoni emessi da una lampada

Se la lampada emette luce monocromatica di lunghezza d'onda $\lambda = 600 \text{ nm}$, la frequenza della radiazione risulta:

$$f = \frac{c}{\lambda} = \frac{3,00 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{600 \text{ nm}} = 5,00 \cdot 10^{14} \text{ Hz}. \quad (6)$$

L'energia di un singolo fotone si ottiene immediatamente dalla relazione di Planck:

$$E = hf = 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} \cdot 5,00 \cdot 10^{14} \text{ Hz} = 3,31 \cdot 10^{-19} \text{ J}. \quad (7)$$

Un elettronvolt è uguale all'energia potenziale a disposizione di un elettrone sottoposto a una differenza di potenziale di 1 V. Vale pertanto:

$$1 \text{ eV} = q_e \cdot \Delta V = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 1 \text{ V} = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ J}. \quad (8)$$

L'energia E vale quindi in elettronvolt:

$$E = 3,31 \cdot 10^{-19} \text{ J} \cdot \frac{1 \text{ eV}}{1,602 \cdot 10^{-19} \text{ J}} = 2,07 \text{ eV}. \quad (9)$$

I fotoni assorbiti da una lastra

In base ai dati forniti, sappiamo che la capacità termica della lastra di rame vale:

$$C = c \cdot m = 0,092 \frac{\text{kcal}}{\text{kg} \cdot ^\circ\text{C}} \cdot 20 \text{ g} = 92 \frac{\text{cal}}{\text{kg} \cdot ^\circ\text{C}} \cdot \frac{4,184 \text{ J}}{1 \text{ cal}} \cdot 0,020 \text{ kg} = 7,7 \frac{\text{J}}{^\circ\text{C}}. \quad (10)$$

La variazione di energia termica della lastra, che subisce una variazione di temperatura ΔT , risulta allora:

$$\Delta U = C \cdot \Delta T = 7,7 \frac{\text{J}}{^\circ\text{C}} \cdot 2 ^\circ\text{C} = 15,4 \text{ J}. \quad (11)$$

Per il primo principio della termodinamica, questa variazione di energia dev'essere uguale all'energia assorbita, come calore irraggiato Q , dalla lastra. L'energia totale della radiazione incidente sulla piastra è perciò uguale a Q .

Ma la radiazione è "composta" di fotoni di frequenza ν e energia:

$$E = h\nu = 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} \cdot 3 \cdot 10^{13} \text{ Hz} = 1,99 \cdot 10^{-20} \text{ J}. \quad (12)$$

Il numero dei fotoni assorbiti è quindi pari a:

$$N = \frac{Q}{E} = \frac{15,4 \text{ J}}{1,99 \cdot 10^{-20} \text{ J}} = 7,74 \cdot 10^{20}. \quad (13)$$

Secondo tema

L'effetto termoionico

Il filamento metallico contiene elettroni in moto con energie casuali. L'energia di ciascun elettrone è però insufficiente a permettergli di sottrarsi al campo elettrico generato dagli ioni positivi che formano il reticolo cristallino. L'energia necessaria ad estrarre un elettrone dal reticolo è detta *lavoro di estrazione* W_e .

Quando il reticolo viene scaldato, l'energia fornita si distribuisce casualmente agli elettroni. Alcuni di essi acquistano così un'energia almeno pari a W_e e possono uscire dal filamento. All'esterno del filamento il campo elettrico del reticolo, che tenderebbe a farli tornare indietro, è superato dal campo elettrico esterno, imposto da G1, che li accelera verso il collimatore.

L'emissione di luce da parte dello schermo

Quando gli elettroni accelerati dal campo elettrico fra il filamento e il collimatore urtano contro i fosfori depositati sullo schermo, cedono a questi parte della propria energia cinetica. L'energia assorbita dagli atomi o dalle molecole dei fosfori è sufficiente a portarli dallo stato fondamentale a uno stato eccitato, corrispondente a uno dei livelli energetici quantizzati disponibili. Successivamente il sistema ritorna nello stato fondamentale, emettendo un fotone di energia pari alla differenza di energia fra il livello eccitato e il livello più basso.

Il tubo catodico

Nello schema della figura 1a. il filamento *Fil* deve essere percorso da corrente, in modo da scaldarsi per effetto Joule; il generatore G2 è presente a questo scopo. Questo generatore può essere inserito nel circuito con entrambe le polarità possibili.

Il circuito costituito dal generatore G2, dal filamento e dai contatti che li uniscono presenta una resistenza piuttosto bassa, in modo da essere percorso da una corrente abbastanza elevata da portare la temperatura del filamento al valore opportuno.

Il generatore G1 non deve invece alimentare una corrente, come si vede anche dal fatto che il circuito di cui fa parte è aperto.

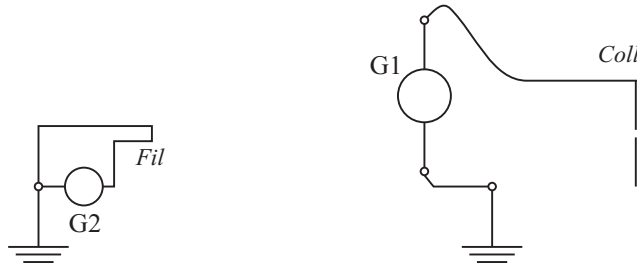


Figura 2: Dettagli da Fig. 1a.

Lo scopo di G1 è di polarizzare il “condensatore” avente il filamento *Fil* come armatura negativa e il collimatore *Coll* come armatura positiva. Perché questo avvenga, in modo da accelerare verso lo schermo gli elettroni emessi dal filamento, il polo positivo di G1 deve essere collegato al collimatore.

Gli elettroni emessi dal filamento si vengono a trovare in una zona (quella fra il filamento e il collimatore) dove il campo elettrico è molto intenso e diretto dal collimatore al filamento. Ciò produce una notevole forza elettrica sugli elettroni, che accelerano in verso opposto al campo, dirigendosi contro il collimatore.

Una volta raggiunto il collimatore, però, molti elettroni passano attraverso il foro nel collimatore e si trovano in una zona dove il campo elettrico è trascurabile. Questi elettroni si

muovono allora di moto rettilineo uniforme (se si trascura la gravità, dato il brevissimo tempo di volo fino allo schermo).

L'energia e la velocità finali degli elettroni

Il sistema di cariche di cui fa parte ogni elettrone, sottoposto alla differenza di potenziale ΔV di 30 kV fra filamento e collimatore, ha un'energia potenziale elettrostatica:

$$U_e = q_e \cdot \Delta V = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 30 \text{ kV} = 4,81 \cdot 10^{-15} \text{ J}. \quad (14)$$

(Per la definizione di elettronvolt, ricordata nella discussione del primo tema, questa energia vale semplicemente 30 keV.)

Quando gli elettroni attraversano la differenza di potenziale, l'energia potenziale elettrostatica si trasforma in energia cinetica degli elettroni stessi. Dopo l'uscita dal collimatore, la velocità e dunque l'energia cinetica degli elettroni non varia più (grazie anche all'alto vuoto realizzato nel tubo catodico).

Al momento dell'impatto con lo schermo, ogni elettrone ha pertanto un'energia cinetica $K = 4,81 \cdot 10^{-15} \text{ J} = 30 \text{ keV}$.

Per la fisica classica, l'energia cinetica di ogni elettrone si può scrivere come:

$$K = \frac{1}{2} m v^2 \quad (15)$$

il che porterebbe a concludere che la velocità con la quale gli elettroni colpiscono lo schermo sia pari a:

$$v_{cl} = \sqrt{\frac{2K}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 4,81 \cdot 10^{-15} \text{ J}}{9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}}} = 1,03 \cdot 10^8 \text{ m/s}. \quad (16)$$

Come si può vedere, questo valore della velocità è pari a più di un terzo della velocità della luce nel vuoto. L'ipotesi che sia possibile applicare la fisica classica al moto degli elettroni nel tubo catodico è perciò discutibile.

In relatività ristretta, l'energia di una particella in moto è data dall'espressione

$$E = \gamma m c^2 \quad (17)$$

dove compare il fattore di dilatazione

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (18)$$

L'energia totale di una particella in moto è anche uguale alla somma della sua energia di riposo e della sua energia cinetica:

$$E = m c^2 + K \quad (19)$$

che per i nostri elettroni vale:

$$\begin{aligned} 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \cdot (3,00 \cdot 10^8 \text{ m/s})^2 + 4,81 \cdot 10^{-15} \text{ J} &= 82,0 \cdot 10^{-15} \text{ J} + 4,8 \cdot 10^{-15} \text{ J} = \\ &= 86,8 \cdot 10^{-15} \text{ J}. \end{aligned} \quad (20)$$

Il rapporto fra E e l'energia a riposo ci fornisce il valore di γ :

$$\gamma = \frac{E}{m c^2} = \frac{86,8 \cdot 10^{-15} \text{ J}}{82,0 \cdot 10^{-15} \text{ J}} = 1,06. \quad (21)$$

Questo valore, anche se ancora abbastanza vicino a 1, è abbastanza grande da dover essere tenuto in conto dai progettisti in vista di un funzionamento ottimale del televisore.

La direzione e il verso del campo magnetico

Guardando la figura 1b., gli elettroni si muovono perpendicolarmente al foglio e uscenti da esso. Per applicare al fenomeno la regola della mano destra relativa al prodotto vettoriale che compare nella forza di Lorentz $\vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B}$, orientiamo il pollice in verso *entrante* al foglio, per tenere conto della carica negativa degli elettroni. Perché gli elettroni siano soggetti a una forza deviante diretta verso A, il campo \vec{B} deve essere orizzontale e orientato da destra a sinistra.

In modo analogo otteniamo i vettori riassunti nella figura seguente.

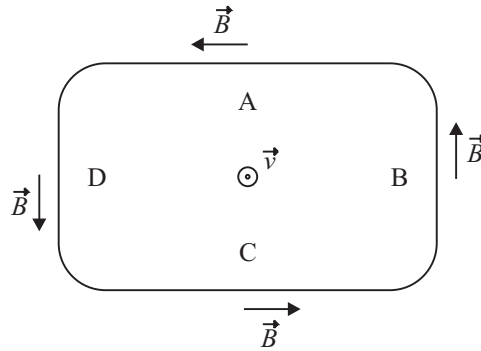


Figura 3: Fig. 1b. modificata

L'intensità del campo magnetico

Il teorema dei seni, applicato due volte ai triangoli isosceli tracciati nella figura 2, permette di calcolare il raggio di curvatura richiesto:

$$r = \frac{\frac{R_Z}{\sin(\delta/2)} \sin(180^\circ - \delta)}{\sin(\delta)} \sin\left(\frac{180^\circ - \delta}{2}\right) = 14,9 \text{ cm.} \quad (22)$$

Poiché \vec{v} e \vec{B} sono perpendicolari per gli elettroni nel tubo catodico, la forza di Lorentz che agisce su di essi vale:

$$F = q_e v B \quad (23)$$

mentre la forza centripeta necessaria a far muovere un elettrone su una traiettoria circolare di raggio r con velocità v è:

$$F = m \frac{v^2}{r}. \quad (24)$$

Uguagliando i secondi membri della (23) e della (24), ricaviamo B :

$$q_e v B = m \frac{v^2}{r} \Rightarrow B = \frac{m v}{q_e r} = \frac{9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \cdot 1,03 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{1,602 \cdot 10^{-19} \cdot 0,149 \text{ m}} = 3,93 \text{ mT.} \quad (25)$$

In questo calcolo abbiamo usato il valore di v ottenuto in precedenza con un calcolo classico. Se dovessimo progettare accuratamente il televisore, dovremmo ripetere il calcolo in forma relativistica, per evitare che l'intensità del campo magnetico desiderato risulti sbagliata.