ESAMI DI MATURITÀ SCIENTIFICA SPERIMENTALE 1995

Trascrizione del testo e redazione delle soluzioni di Paolo Cavallo.

La prova

Tema di Fisica

In un laboratorio un ago magnetico è libero di ruotare ed è collocato al centro di una spira circolare di rame posta in posizione verticale e avente raggio 5 cm. In condizione di equilibrio, se nella spira non passa alcuna corrente, la direzione dell'ago coincide con la proiezione verticale della spira.

Il candidato calcoli in tesla la componente orizzontale dell'induzione magnetica terrestre all'interno del laboratorio avendo osservato che, quando la spira è attraversata dalla corrente d'intensità 1 A, l'ago effettua una rotazione formando un angolo di 25 gradi con il piano della spira.

Quesito di Fisica

In un cantiere si devono sollevare carichi da 50 kg ciascuno a 20 metri di altezza ma, per un guasto al sistema elettrico, è necessario ricorrere ad un motore in cc alimentato da una batteria nuova di automobile da 12 V e 40 Ah.

Il candidato valuti la potenza minima accettabile per il motore e calcoli il numero di carichi che potranno essere sollevati prima di esaurire la batteria, sapendo che:

1. la batteria è nuova e perfettamente carica,
2. il motore impiega un minuto per sollevare ciascun carico,
3. il sistema ha un rendimento del 60%.

La soluzione

Tema di Fisica

Quando nella spira non passa alcuna corrente, la direzione dell'ago coincide evidentemente con quella della componente orizzontale del campo magnetico terrestre $\vec{B}_0$, o induzione magnetica terrestre. A questo proposito, conviene notare come il termine tradizionale di "induzione magnetica" per indicare il campo $\vec{B}$, anche se perfettamente corretto, sta scomparendo dall'uso corrente almeno nella Scuola Secondaria; forse è bene prendere in considerazione la possibilità che gli studenti lo incontrino in un contesto come questo, e segnalare loro in qualche occasione la doppia denominazione. È importante fare in modo che non si corra il pericolo di fraintendimento con il fenomeno dell'*induzione elettromagnetica*, che è naturalmente del tutto differente.

Al passare di una corrente continua i nella spira, si stabilisce all'interno di questa un ulteriore campo magnetico $\vec{B}_S$ generato dalla corrente stessa. Nei punti sull'asse della spira tale campo magnetico è diretto lungo l'asse e quindi è perpendicolare al campo $\vec{B}_0$. La sua intensità è data dall'espressione:

$$B(y) = \frac{\mu_0\, i\, R^2}{2\sqrt{(R^2 + y^2)^3}} \tag{1}$$

dove R è il raggio della spira e y è la distanza del punto sull'asse dal centro della spira.

Si tratta di un'espressione ben nota e di notevole importanza. Per ricavarla, occorre integrare sulla spira il contributo $d\vec{B}$ di ogni elemento di lunghezza ds, contributo dato dalla legge di Biot-Savart. Non è certo una derivazione alla portata di un normale candidato all'Esame, per cui bisogna concludere che l'estensore della prova ipotizzasse che il candidato sapesse citare la formula a memoria.

L'ago magnetico si trova nel piano della spira, per cui $y = 0$. L'intensità del campo magnetico in tale posizione risulta:

$$B_S = \frac{\mu_0\, i}{2R} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}\, \dfrac{\mathrm{N}}{\mathrm{A}^2} \cdot 1\mathrm{A}}{2 \cdot 0{,}05\,\mathrm{m}} = 12{,}6\,\mu\mathrm{T}. \tag{2}$$

È difficile dare una regola certa per il numero di cifre significative con cui va espresso il risultato delle operazioni numeriche. Il testo fornisce dati interi, che sembrano avere il significato di valori puramente teorici, senza limiti di precisione. In queste condizioni, sembra ragionevole suggerire di esprimere il risultato con tre o quattro cifre significative.

All'equilibrio, l'ago magnetico si disporrà parallelamente alla direzione del campo magnetico totale, dato dalla somma vettoriale:

$$\vec{B}_{tot} = \vec{B}_0 + \vec{B}_S. \tag{3}$$

I vettori $\vec{B}_0$ e $\vec{B}_S$ rappresentano i cateti di un triangolo rettangolo avente ipotenusa uguale a $\vec{B}_{tot}$. Il testo afferma che l'angolo opposto al cateto $\vec{B}_S$ vale $25°$. Di conseguenza, il rapporto fra i due cateti dev'essere uguale alla tangente trigonometrica di tale angolo:

$$\tan(25°) = \frac{B_S}{B_0}$$

da cui ricaviamo il valore di B_0, come richiesto:

$$B_0 = \frac{B_S}{\tan(25°)} = \frac{12{,}6\,\mu\mathrm{T}}{0{,}466} = 26{,}9\,\mu\mathrm{T}. \tag{4}$$

Quesito di Fisica

La potenza che deve avere il motore richiesto può essere ricavata dalla condizione 2. Se il motore solleva un carico di 50 kg ad un'altezza di 20 m in un minuto, deve fornire una potenza utile pari almeno a:

$$P_u = \frac{W}{\Delta t} = \frac{\vec{F} \circ \Delta\vec{s}}{\Delta t} = \frac{m\,g\,\Delta h}{\Delta t} = \frac{50\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}8\,\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 20\,\mathrm{m}}{60\,\mathrm{s}} = 163\,\mathrm{W}. \tag{5}$$

La potenza utile è una frazione, pari al 60%, della potenza totale P_t erogata dalla batteria al motore:

$$P_t = \frac{P_u}{60\%} = \frac{163\,\mathrm{W}}{0{,}60} = 272\,\mathrm{W}. \tag{6}$$

Il motore si comporta come un carico resistivo in corrente continua che assorbe una potenza P_t quando ai suoi capi è stabilita una differenza di potenziale $\Delta V = 12\,\mathrm{V}$. Possiamo applicare perciò la relazione di Joule

$$P = \Delta V \cdot I$$

per determinare la corrente I assorbita dal motore:

$$I = \frac{P_t}{\Delta V} = \frac{272\,\mathrm{W}}{12\,\mathrm{V}} = 22{,}7\,\mathrm{A}. \tag{7}$$

La batteria è in grado di erogare una quantità di carica Q complessivamente pari a una corrente di intensità 40 A che fluisce per 1 ora:

$$Q = 40\,\mathrm{A} \cdot 3600\,\mathrm{s} = 144\,\mathrm{kC}.$$

Se il motore assorbe una corrente di 22,7 A, il tempo impiegato dalla batteria per esaurirsi risulta

$$\Delta t = \frac{Q}{I} = \frac{144\,\mathrm{kC}}{22{,}7\,\mathrm{A}} = 6344\,\mathrm{s} = 106\,\mathrm{min}. \tag{8}$$

Poiché il motore solleva un carico al minuto, questo è anche il numero di carichi sollevati.

A questo punto è indispensabile muovere al testo un'osservazione che non dovrebbe mancare neppure nello svolgimento del quesito da parte del candidato. Il problema è stato risolto in base alle ipotesi del testo, ma è necessario far notare che tali ipotesi sono del tutto irrealistiche. È necessario infatti ipotizzare che la batteria continui a erogare la corrente I e a stabilire la differenza di potenziale ΔV da noi calcolate per tutta la durata del suo funzionamento. Ora, noi sappiamo che questo non è possibile. Se il regime da noi determinato può venire realizzato all'inizio, quando la batteria "è nuova e perfettamente carica", ben presto la batteria inizierà a perdere efficienza e i valori effettivi di corrente e tensione caleranno progressivamente. L'idea di una batteria che funziona in maniera ideale fino ad esaurirsi all'improvviso costituisce una schematizzazione poco realistica, necessaria a risolvere il problema, ma tale da rendere poco significativo in pratica il risultato ottenuto.

Lo stesso problema può essere risolto per un'altra strada. La batteria può essere trattata come un sistema che porta una quantità di carica Q a una differenza di potenziale ΔV, e quindi un sistema che fornisce un'energia potenziale elettrostatica

$$U = Q \cdot \Delta V = 144\,\mathrm{kC} \cdot 12\,\mathrm{V} = 1{,}73\,\mathrm{MJ}. \tag{9}$$

L'energia è utilizzata dal motore con un'efficienza del 60%, per cui il lavoro complessivamente svolto dal motore risulta:

$$W = 0{,}60 \cdot U = 0{,}60 \cdot 1{,}73\,\mathrm{MJ} = 1{,}04\,\mathrm{MJ}. \tag{10}$$

Ad ogni carico il lavoro compiuto è $w = m\,g\,\Delta h = 9{,}8\,\mathrm{kJ}$, per cui il numero complessivo di carichi realizzabili risulta:

$$N = \frac{W}{w} = \frac{1{,}04\,\mathrm{MJ}}{9{,}8\,\mathrm{kJ}} = 106 \tag{11}$$

risultato che coincide naturalmente con quello (vedi eq. 8) precedentemente ottenuto per altra strada. Per questo secondo metodo, comunque, valgono le stesse osservazioni già esposte a proposito della scarsa plausibilità.