

ESAMI DI MATURITÀ SCIENTIFICA SPERIMENTALE 1996

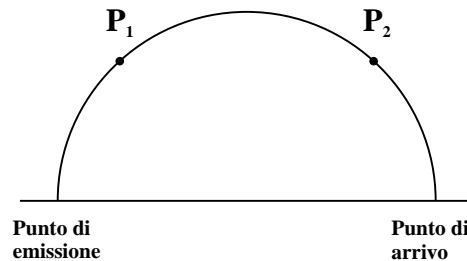
Trascrizione del testo e redazione delle soluzioni di Paolo Cavallo.

La prova

Tema 1

Una particella α ($q = 3,2 \cdot 10^{-19}$ C, $m = 6,7 \cdot 10^{-27}$ kg), emessa da una sostanza radioattiva, descrive nel vuoto una traiettoria semicircolare di raggio $r = 10$ cm a causa di un campo magnetico d'induzione $B = 0,8$ T.

Il candidato calcoli in eV l'energia cinetica con cui è stata emessa la particella e disegni, nei punti P_1 e P_2 , i vettori \vec{v} , \vec{B} , \vec{F} nella figura che descrive la sua traiettoria.



Tema 2

Un recipiente cilindrico, a pareti riflettenti e pieno d'acqua, ha sul fondo, al centro, una sorgente luminosa puntiforme S che emette raggi di luce in tutte le direzioni. Per il fenomeno della riflessione totale, dall'acqua emerge un cono di luce che sulla superficie di separazione acqua-aria ha una sezione luminosa circolare di diametro $d = 20$ cm.

Il candidato calcoli l'indice di rifrazione dell'acqua, sapendo che la sua profondità dentro il recipiente è $h = 88$ mm.

La soluzione

Tema 1

Sia per quanto riguarda l'uso del termine "campo magnetico di induzione", che per quanto riguarda il numero di cifre significative nei risultati numerici, si rimanda ai commenti riportati nella discussione della prova relativa all'anno 1995.

La forza agente su una particella di carica q in moto con velocità \vec{v} in un campo magnetico \vec{B} non è altro che la forza di Lorentz magnetica, data dall'espressione

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} \quad (1)$$

la cui intensità è pari a

$$F = qvB_{\perp} \quad (2)$$

dove B_{\perp} è la componente di \vec{B} perpendicolare a \vec{v} , uguale al prodotto di B per il seno dell'angolo formato da \vec{v} e \vec{B} . Se \vec{B} è uniforme nella regione attraversata dalla particella, la forza di Lorentz ha dappertutto la stessa intensità ed è sempre perpendicolare alla velocità della particella. In altri termini, si comporta come una forza centripeta, sotto la cui azione la particella eseguirà un moto circolare uniforme. La velocità resterà costante in modulo per l'intero moto, in quanto la forza di Lorentz (1) non compie lavoro sulla particella e quindi non ne cambia l'energia.

Il testo della prova non specifica se il campo \vec{B} è uniforme né qual è l'angolo da esso formato con la velocità della particella. Il fatto che si dica che la traiettoria è circolare sembra implicare che il candidato debba dare per scontata la prima ipotesi. Quanto all'angolo, dobbiamo osservare che il problema non risulta determinato se questo va considerato incognito. È ragionevole pensare che anche in questo caso si debba dare per scontata un'ipotesi, vale a dire, che \vec{v} e \vec{B} siano perpendicolari. Questa ipotesi è ragionevole anche perché questa sarebbe la scelta adottata dallo sperimentatore che volesse servirsi della configurazione descritta per misurare l'energia della particella. Poiché il testo della prova non lo fa, il candidato dovrebbe enunciare esplicitamente le due ipotesi.

La forza centripeta in un moto circolare uniforme può essere scritta nella forma:

$$F = m \frac{v^2}{r} \quad (3)$$

dove m è la massa del punto materiale in moto, v la sua velocità e r il raggio della traiettoria. Ponendo la forza di Lorentz (2) uguale alla forza centripeta (3):

$$qvB = m \frac{v^2}{r}$$

possiamo ricavare un'espressione che ci permette di calcolare la velocità della particella:

$$v = \frac{qBr}{m} = \frac{3,2 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 0,8 \text{ T} \cdot 0,10 \text{ m}}{6,7 \cdot 10^{-27} \text{ kg}} = 3,82 \cdot 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (4)$$

Il valore di v risulta molto inferiore al valore $c = 3,00 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ della velocità della luce nel vuoto. Questo giustifica a posteriori la nostra scelta di svolgere una trattazione non relativistica del problema.

Sempre in base a questa osservazione, utilizziamo l'espressione non relativistica per calcolare l'energia cinetica della particella, come richiesto:

$$K_J = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} \cdot 6,7 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \cdot \left(3,82 \cdot 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2 = 4,89 \cdot 10^{-14} \text{ J}. \quad (5)$$

Il testo richiede che tale valore sia espresso in elettronvolt. Più che citare semplicemente il valore di un elettronvolt in joule, può essere interessante determinarlo a partire dalla definizione: 1 eV è l'energia potenziale elettrica a disposizione di una particella di carica pari alla carica elementare $e = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ sottoposta a una differenza di potenziale di 1 V:

$$(1 \text{ eV})_J = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 1 \text{ V} = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ J}.$$

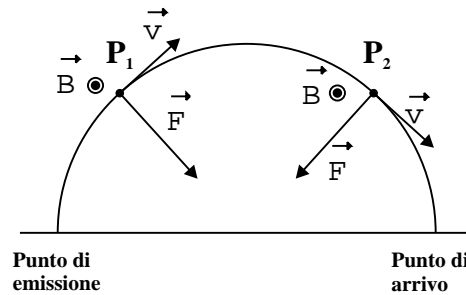
Sostituendo questo valore nella (5) otteniamo il risultato richiesto:

$$K_{eV} = \frac{K_J}{(1 \text{ eV})_J} = \frac{4,89 \cdot 10^{-14} \text{ J}}{1,602 \cdot 10^{-19} \text{ J}} \cdot 1 \text{ eV} = 3,05 \text{ MeV}. \quad (6)$$

Per quanto riguarda la richiesta di tracciare sulla traiettoria, in due punti predeterminati, i vettori \vec{v} , \vec{F} e \vec{B} , osserviamo semplicemente che:

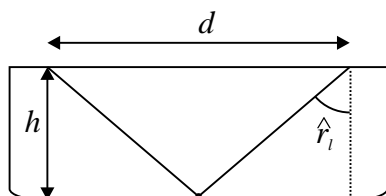
- la velocità deve essere sempre tangente alla traiettoria;
- la forza deve essere sempre radiale e diretta verso il centro della traiettoria;
- tenendo conto del segno della carica e della regola della mano destra, il campo magnetico deve essere uscente dal piano del foglio;
- il modulo di ciascun vettore deve rimanere lo stesso lungo la traiettoria.

Otteniamo perciò la figura seguente:



Tema 2

La situazione descritta dal testo può essere illustrata con il seguente schema:



dove \hat{r}_l è l'angolo limite di rifrazione dall'acqua all'aria (praticamente uguale a quello dall'acqua al vuoto).

Dalla figura ricaviamo immediatamente che:

$$\tan(\hat{r}_l) = \frac{d/2}{h}$$

per cui

$$\hat{r}_l = \arctan\left(\frac{d/2}{h}\right) = \arctan\left(\frac{10 \text{ cm}}{8,8 \text{ cm}}\right) = \arctan(1,136) = 0,849 \text{ rad.} \quad (7)$$

Dalla legge di Snell

$$\sin(\hat{i}) = n \sin(\hat{r}) \quad (8)$$

ponendo $\hat{r} = \hat{r}_l$ e $\hat{i} = \frac{\pi}{2}$ rad si ricava l'indice di rifrazione:

$$n = \frac{1}{\sin(\hat{r})} = \frac{1}{\sin(0,849 \text{ rad})} = \frac{1}{0,751} = 1,33. \quad (9)$$

A rigore, quello che abbiamo ricavato è l'indice di rifrazione dell'acqua *relativo all'aria*. Ma, come è noto, gli indici di rifrazione relativi all'aria differiscono molto poco dagli indici relativi al vuoto, cioè dagli indici di rifrazione *assoluti*. Possiamo quindi affermare che l'indice di rifrazione dell'acqua risulta pari a 1,33, un risultato probabilmente già noto al candidato.