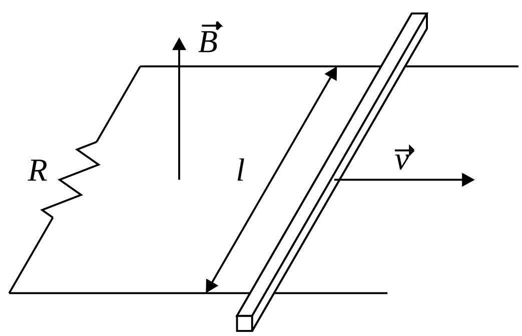
ESAMI DI MATURITÀ SCIENTIFICA SPERIMENTALE 1997

Trascrizione del testo e redazione delle soluzioni di Paolo Cavallo.

La prova

Tema1

Una sbarretta conduttrice scorre su due guide metalliche parallele appoggiate sopra un piano orizzontale. Esse distano tra di loro $l = 20\,\text{cm}$ e sono collegate da un conduttore di resistenza $R = 2\,\Omega$. Sapendo che la sbarretta si muove in un campo magnetico con $\vec{B}$ di intensità 0,5 T, perpendicolare al piano ed orientato come in figura, calcolare:



- la d.d.p. indotta agli estremi della sbarretta in mV,
- l'intensità di corrente in mA che l'attraversa,
- la forza di attrito, sapendo che la sbarretta si muove con velocità costante $v = 20\,\text{cm/s}$.

Il candidato presenti la risoluzione sotto forma di relazione scientifica, descrivendo e motivando i passaggi intermedi.

Tema 2

Il candidato spieghi l'effetto fotoelettrico descrivendone almeno un'applicazione. Calcoli poi in eV la massima energia cinetica che possono avere gli elettroni emessi da una superficie investita da una radiazione elettromagnetica di lunghezza d'onda $\lambda = 4 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{m}$, sapendo che la lunghezza d'onda di soglia è $\lambda_0 = 6 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{m}$.

Il candidato presenti la risoluzione sotto forma di relazione scientifica, descrivendo e motivando i passaggi intermedi.

La soluzione

Tema 1

Nella situazione descritta dal testo, il flusso Φ del campo magnetico $\vec{B}$, attraverso una qualsiasi superficie avente il circuito come bordo, varia nel tempo. In base alla legge di Faraday-Neumann-Lenz, nel circuito si stabilisce allora una *forza elettromotrice indotta* ε_{ind}, la quale produce a sua volta una corrente indotta i_{ind} nel circuito. Il verso della corrente indotta è tale da generare un secondo campo magnetico B' tale da opporsi alla variazione del flusso Φ.

La legge di Faraday-Neumann-Lenz può essere scritta in forma matematica come:

$$\varepsilon_{ind} = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}. \tag{1}$$

Poiché il campo magnetico $\vec{B}$ attraverso il circuito è uniforme e costante nel tempo, la variazione $\Delta\Phi$ del flusso relativo in un intervallo di tempo Δt è dovuta soltanto alla variazione ΔS dell'area sulla quale si calcola il flusso. Se come area su cui si calcola il flusso viene scelta, come è naturale, l'area del rettangolo delimitato dal resistore di resistenza R, dalla sbarretta e dalle guide metalliche, nell'intervallo Δt quest'area varia, per effetto del moto della sbarretta, di una quantità uguale al rettangolo spazzato dalla sbarretta in movimento. Tale rettangolo ha dimensioni pari rispettivamente a l e $\Delta s = v \cdot \Delta t$, per cui:

$$\Delta S = l \cdot v \cdot \Delta t. \tag{2}$$

La variazione del flusso di $\vec{B}$ risulta pertanto uguale al flusso attraverso ΔS; ricordando che $\vec{B}$ è uniforme e perpendicolare alla superficie del circuito, e utilizzando la (2):

$$\Delta\Phi = \vec{B} \circ \Delta\vec{S} = B \cdot \Delta S = B \cdot l \cdot v \cdot \Delta t. \tag{3}$$

Sostituendo la (3) nella (1), otteniamo la seguente espressione della forza elettromotrice indotta:

$$\varepsilon_{ind} = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -B \cdot l \cdot v = -0,5\,\mathrm{T} \cdot 0,20\,\mathrm{m} \cdot 0,20\,\mathrm{m/s} = -20\,\mathrm{mV}. \tag{4}$$

Il segno meno di questo risultato va inteso in questo senso: guardando il circuito dalla direzione individuata dal vettore $\vec{B}$, la forza elettromotrice indotta genera una corrente che scorre nel circuito in senso negativo, cioè in senso *orario*. In base alla prima regola della mano destra, è facile rendersi conto che tale corrente indotta genera a sua volta un campo magnetico $\vec{B}'$ diretto come $\vec{B}$ ma avente verso opposto. Tale nuovo campo magnetico agisce quindi in modo da *diminuire* il flusso totale attraverso la superficie del circuito, opponendosi all'*aumento* del flusso dovuto al moto della sbarretta. Questo è proprio ciò che prevede la legge di Lenz.

L'intensità della corrente indotta i_{ind} può essere determinata supponendo (come è ragionevole in base al testo) che la resistenza del tratto R sia molto maggiore di quella offerta dal resto del circuito. Possiamo allora supporre che la forza elettromotrice sia praticamente uguale alla caduta di tensione ai capi del resistore, data a sua volta dalla legge di Ohm:

$$\varepsilon_{ind} = R \cdot i_{ind}. \tag{5}$$

Richiamando la (4) e risolvendo la (5) in funzione di i_{ind} giungiamo finalmente al valore:

$$i_{ind} = \frac{\varepsilon_{ind}}{R} = \frac{20\,\mathrm{mV}}{2\,\Omega} = 10\,\mathrm{mA} \tag{6}$$

dove abbiamo ignorato il segno meno che compare nella (4), poiché siamo interessati esclusivamente alle intensità. Il segno avrebbe comunque un significato analogo a quello già discusso: percorrendo il circuito in senso *antiorario*, incontriamo prima il capo del resistore a potenziale più basso.

Sempre ignorando la caduta di tensione nei tratti di guida metallica che chiudono il circuito, la d.d.p. ai capi della sbarretta deve essere uguale alla caduta di tensione ai capi di R, pari dunque a 20 mV.

Questo risultato merita una discussione più approfondita. Possiamo chiederci qual è l'origine della forza elettromotrice che si stabilisce sul circuito. Osserviamo allora che gli elettroni di conduzione presenti nella sbarretta sono in moto rispetto al campo magnetico esterno $\vec{B}$. Di conseguenza, essi sono soggetti a una forza di Lorentz, data dalla legge:

$$\vec{F} = q \cdot \vec{v} \times \vec{B}, \tag{7}$$

che imprime loro un moto longitudinale alla sbarretta. In questo modo gli elettroni si spostano verso un estremo della sbarretta, così che ai capi di questa viene a stabilirsi la differenza di potenziale da noi determinata. Si potrebbe concludere che sia la forza di Lorentz a compiere lavoro sugli elettroni e in ultima analisi a generare la forza elettromotrice (che è definita, lo ricordiamo, come il rapporto fra il lavoro eseguito sulle cariche e il valore delle cariche stesse). In realtà la faccenda è più complicata, in quanto la forza di Lorentz (7) è ad ogni istante perpendicolare al moto degli elettroni e quindi non può compiere lavoro su di essi. Per un'analisi completa della situazione, sarebbe indispensabile prendere in considerazione le forze di natura elettrica esercitate dal reticolo cristallino sugli elettroni.

Questo non è in definitiva necessario. A compiere davvero lavoro sul sistema è naturalmente la forza esterna $\vec{F}_{ext}$ che tiene in movimento la sbarretta. È questa forza che fornisce l'energia necessaria a far muovere gli elettroni nel circuito, energia che viene loro continuamente sottratta per effetto Joule e quindi, in ultima analisi, per i processi che tendono a far aumentare la temperatura del circuito e in particolare del resistore.

L'effetto Joule può essere quantificato mediante la potenza dissipata al passaggio della corrente attraverso il resistore:

$$P = \Delta V \cdot i. \tag{8}$$

La potenza P deve essere fornita dal lavoro eseguito dalla forza esterna $\vec{F}_{ext}$ sul centro di massa della sbarretta, che si muove alla velocità $\vec{v}$ e in un intervallo Δt esegue uno spostamento $\Delta\vec{s} = \vec{v} \cdot \Delta t$. Poiché la potenza fornita è definita dal rapporto fra il lavoro W eseguito e l'intervallo di tempo impiegato, otteniamo:

$$P = \frac{W}{\Delta t} = \frac{\vec{F}_{ext} \circ \Delta\vec{s}}{\Delta t} = \frac{\vec{F}_{ext} \circ \vec{v} \cdot \Delta t}{\Delta t} = F_{ext} \cdot v. \tag{9}$$

Uguagliando la (8) e la (9) e risolvendo in funzione di F_{ext} otteniamo:

$$F_{ext} = \frac{\Delta V \cdot i}{v} = \frac{20\,\mathrm{mV} \cdot 10\,\mathrm{mA}}{0,20\,\mathrm{m/s}} = 1,0\,\mathrm{mN}. \tag{10}$$

Il testo del problema richiede il calcolo della forza di attrito sulla sbarretta. Non è chiaro quale sia in questo caso l'intenzione dell'estensore della prova. Naturalmente, dato che la sbarretta si muove di moto rettilineo uniforme, la forza totale su di essa deve essere zero. Pertanto, sulla sbarretta deve agire una "forza di attrito" uguale alla forza esterna motrice. Ma qual è la natura fisica di questa forza? Possiamo prendere in considerazione due eventualità:

1. per "forza di attrito" si intende la sola forza $i \cdot \vec{l} \times \vec{B}$ che il campo magnetico imprime sulla sbarretta quando in essa si stabilisce una corrente: per la regola della mano destra, questa forza magnetica si oppone al moto della sbarretta e quindi si oppone alla forza motrice $\vec{F}_{ext}$, comportandosi come una forza resistente o di attrito;

2. oltre a questa forza resistente di origine magnetica, deve intendersi presente anche una forza di attrito meccanico fra la sbarretta e le guide metalliche su cui scivola; se è presente questa seconda forza di attrito, deve essere presente un ulteriore forza motrice esterna che la equilibri.

Nell'ipotesi 1. la forza di attrito è uguale e opposta alla forza motrice esterna che sostiene la forza elettromotrice indotta. Abbiamo già quantificato tale forza in 1,0 mN, quindi la forza di attrito vale anch'essa 1,0 mN. Nell'ipotesi 2. il problema è indeterminato. Siamo in grado di determinare la forza esterna necessaria a fornire lavoro elettrico al sistema, ma non sappiamo come determinare la forza necessaria a fornire l'energia cinetica consumata dalla forza di attrito meccanico. In assenza di una "interpretazione autentica", non possiamo andare oltre queste osservazioni, né avrebbe potuto farlo il candidato.

Tema 2

L'effetto fotoelettrico può essere messo in evidenza utilizzando un opportuno tubo a vuoto con due elettrodi connessi a una pila che mantiene fra essi una differenza di potenziale assegnata. Poiché i due elettrodi sono isolati, nel circuito così costituito non passa alcuna corrente. Ma se il catodo (l'elettrodo connesso al polo negativo della pila) è costituito da una piastrina metallica, è possibile far passare una corrente nel circuito illuminando il catodo con una sorgente di radiazione elettromagnetica, visibile o ultravioletta. Finché la lunghezza d'onda della radiazione impiegata è *superiore* a un certo valore λ_0, detto lunghezza d'onda di soglia, nel circuito non si osserva alcuna corrente, qualunque sia l'intensità della sorgente impiegata. La corrente passa soltanto se la radiazione ha una lunghezza d'onda uguale o inferiore a λ_0.

Dal punto di vista dell'elettromagnetismo classico, questo è effetto è sconcertante. Se nel circuito si stabilisce una corrente, possiamo ipotizzare che il catodo illuminato emetta elettroni, in maniera simile a quello che avviene nell'effetto termoionico. L'energia necessaria ad abbandonare il catodo, indicata come *funzione lavoro* W, deve evidentemente essere fornita agli elettroni dalla radiazione incidente. Ma secondo l'elettromagnetismo classico l'energia della radiazione non dipende dalla lunghezza d'onda. In altri termini, con una sorgente di radiazione abbastanza intensa, si dovrebbe osservare un passaggio di corrente per qualunque valore della lunghezza d'onda. L'esistenza di un effetto di soglia resta inspiegabile.

L'effetto fotoelettrico fu spiegato da Einstein nel 1905 in base all'ipotesi dei quanti di luce, già avanzata in altra forma da Planck cinque anni prima a proposito del problema del corpo nero. Planck aveva proposto di *quantizzare* gli scambi di energia fra radiazione e materia, ipotizzando che essi potessero avvenire soltanto per multipli di un'energia minima, data dal prodotto della costante h (oggi nota come *costante di Planck*) per la frequenza f della radiazione. Einstein estende l'ipotesi di Planck, proponendo di quantizzare la radiazione stessa e di considerarla come composta di *quanti di luce* aventi energia hf. Indicheremo questi quanti con il nome di *fotoni*, assegnato loro soltanto in seguito. Ogni fotone ha quindi un'energia:

$$E_f = h\,f = \frac{h\,c}{\lambda}. \tag{11}$$

Einstein propose il seguente modello. Quando un fotone colpisce un elettrone nel metallo che costituisce il catodo, gli cede la propria energia hf. Se la frequenza del fotone è troppo bassa (ovvero, se la lunghezza d'onda è troppo alta), l'energia ceduta all'elettrone è inferiore a W e l'elettrone resta confinato nel metallo, dove negli urti con il reticolo cristallino perde immediatamente l'energia acquistata. Se invece f è uguale o superiore a una frequenza di soglia f_0 (ovvero, se λ è uguale o inferiore a $\lambda_0 = c/f_0$) l'elettrone acquista un'energia almeno sufficiente a lasciare il metallo e a muoversi nel campo elettrico esterno stabilito dalla pila. La condizione che determina λ_0 è allora semplicemente:

$$W = \frac{h\,c}{\lambda_0}. \tag{12}$$

L'effetto fotoelettrico è sfruttato in diversi dispositivi, fra cui le *cellule fotoelettriche* impiegate come interruttori sensibili alla luce nei circuiti che regolano l'apertura di cancelli automatici o l'attivazione di sistemi di allarme. Quando la radiazione che illumina il catodo viene intercettata da un oggetto di passaggio, la corrente nel circuito si interrompe. La variazione di corrente può essere utilizzata come segnale che attiva il servomeccanismo di apertura di un cancello.

Per il principio di conservazione dell'energia, l'energia che l'elettrone possiede appena al di fuori del catodo deve essere uguale all'energia ceduta dal fotone, diminuita dell'energia W necessaria ad abbandonare il metallo e, eventualmente, dell'ulteriore energia persa per collisioni con gli atomi del metallo. L'energia che un elettrone possiede dopo essere sfuggito al metallo è quindi al più uguale a:

$$E_e = E_f - W. \tag{13}$$

Nelle ipotesi del testo $\lambda = 4 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{m}$ e $\lambda_0 = 6 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{m}$. Il valore della costante di Planck nel Sistema Internazionale è $6,626\,\mathrm{J \cdot s}$ (forse è ragionevole ipotizzare che l'estensore della prova preveda che il commissario possa fornire esplicitamente questo valore, come pure quello della velocità della luce nel vuoto, se il candidato non li ricorda a memoria). Sostituendo nella (13) le espressioni (11) e (12), otteniamo:

$$\begin{aligned} E_e &= \frac{h\,c}{\lambda} - \frac{h\,c}{\lambda_0} = h\,c\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_0}\right) = \\ &= 6,626 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{J \cdot s} \cdot 3,00 \cdot 10^{8}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot \left(\frac{1}{4 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{m}} - \frac{1}{6 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{m}}\right) = \\ &= 1,66 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{J}. \end{aligned} \tag{14}$$

Poiché $1\,\mathrm{eV} = 1,602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{J}$, l'energia così determinata vale:

$$E_e = 1,03\,\mathrm{eV}.$$