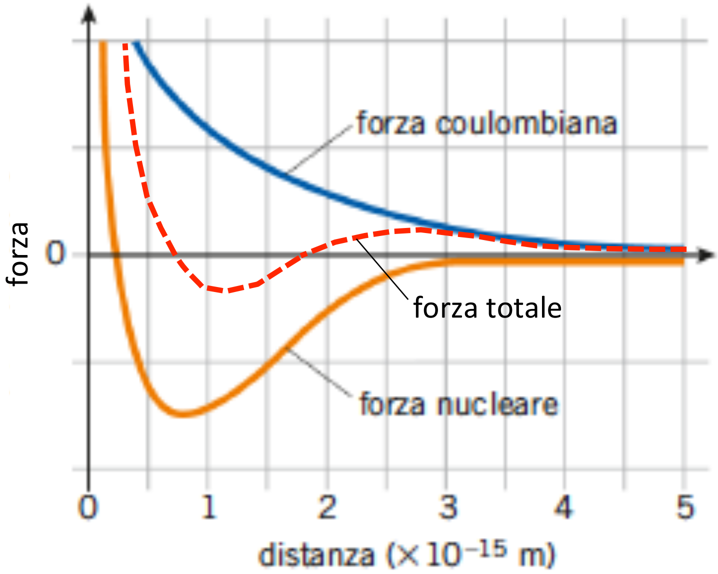
QUESITI

1 Quesito

Se tra i nucleoni agisse soltanto la forza elettrostatica, oltre al nucleo ^1_1H non ne esisterebbero altri, perché i protoni si respingerebbero, mentre i neutroni non sarebbero soggetti ad alcuna forza.
Tra i nucleoni agisce una forza nucleare attrattiva e all'interno del nucleo tale forza prevale su quella elettrostatica repulsiva.
La forza nucleare è molto intensa alle piccole distanze e diminuisce rapidamente quando i nucleoni si allontanano.
Viene rappresentata nella seguente figura, insieme alla forza coulombiana e alla forza totale.



Osserviamo che:

- due protoni che si trovano a una distanza inferiore a circa $0{,}7 \cdot 10^{-15}$ m si respingono, poiché la forza totale, somma della forza coulombiana e della forza nucleare, è repulsiva;
- a una distanza compresa approssimativamente tra $0{,}7 \cdot 10^{-15}$ m e $1{,}7 \cdot 10^{-15}$ m i due protoni si attraggono e restano vicini, dal momento che in questo intervallo la forza nucleare, attrattiva, ha modulo maggiore rispetto alla forza elettrostatica, repulsiva;
- a una distanza superiore a $1{,}7 \cdot 10^{-15}$ m i due protoni si respingono, perché la repulsione coulombiana prevale sulla forza nucleare, che diviene del tutto trascurabile oltre i $3 \cdot 10^{-15}$ m.

I neutroni contribuiscono a rendere stabile il nucleo, perché essi non prendono parte alla repulsione coulombiana, ma grazie alla forza nucleare si attraggono tra loro e attraggono anche i protoni.
Per questa ragione i nuclei con carica maggiore, nei quali è più intensa la forza repulsiva di natura elettrostatica che ogni protone subisce complessivamente da tutti gli altri, contengono più neutroni che protoni.

2 Quesito

La relazione tra vita media e tempo di dimezzamento è

$$\tau = \frac{T_{1/2}}{\ln 2},$$

per cui troviamo

$$\frac{N_0}{20} = N_0\, e^{-\frac{t}{\tau}} = N_0\, e^{-\frac{t \ln 2}{T_{1/2}}} = N_0 \left(e^{\ln 2}\right)^{-\frac{t}{T_{1/2}}} = N_0\, 2^{-\frac{t}{T_{1/2}}}.$$

Quindi basta risolvere l'equazione

$$2^{\frac{t}{T_{1/2}}} = 20 \quad \Rightarrow \quad t = T_{1/2} \log_2 20 = (6586\ \text{s}) \cdot 4{,}3219 = 2{,}846 \cdot 10^4\ \text{s}.$$

3 Quesito

L'isotopo di ${}^{7}_{3}\text{Li}$ è composto da 7 – 3 = 4 neutroni e da 3 protoni e ha un difetto di massa

$$\Delta m = 2m_{\text{H}} + 4m_n - m_{\text{Li}} = 3 \cdot 1{,}007825\ \text{u} - 4 \cdot 1{,}008665\ \text{u} - 7{,}016003\ \text{u} = 0{,}042132\ \text{u}.$$

Esprimiamo il difetto di massa in MeV:

$$\Delta m = \left(0{,}042132\ \text{u}\right)\left[931{,}5\, \frac{\text{MeV}}{c^2}\text{u}\right] = 39{,}25\ \text{MeV}.$$

L'energia di legame per nucleone è

$$\frac{E_L}{A} = \frac{39{,}25\ \text{MeV}}{7\ \text{nucl}} = 5{,}607\ \text{MeV/nucl.}$$

4 Quesito

a. ${}^{40}_{19}\text{K} \rightarrow {}^{40}_{20}\text{Ca} + e^- + \bar{\nu}_e$

b. Calcoliamo il difetto di massa in unità di massa atomica:

$$\Delta m = 39{,}953575\ \text{u} - 39{,}951619\ \text{u} - 5{,}486 \cdot 10^{-4}\ \text{u} = 1{,}4074 \cdot 10^{-3}\ \text{u}.$$

Esprimiamo il difetto di massa in MeV/c^2:

$$\Delta m = \left(1{,}4074 \cdot 10^{-3}\ \text{u}\right)\left[931{,}5\, \frac{\text{MeV}}{c^2}\text{u}\right] = 1{,}311\ \text{MeV}.$$

Quindi l'energia rilasciata nel decadimento è

$$E = \Delta m c^2 = \left(1{,}311\, \frac{\text{MeV}}{c^2}\right)c^2 = 1{,}311\ \text{MeV}.$$

PROBLEMI

5 Problema

a. Visto che il numero atomico del nucleo diminuisce di due unità, si tratta di un decadimento alfa. L'equazione che descrive la reazione è, quindi:

$^{238}_{94}\mathrm{Pu} \rightarrow {}^{234}_{92}\mathrm{U} + {}^{4}_{2}\mathrm{He}.$

Il valore della vita media del plutonio-238 è

$$\tau = \frac{T_{1/2}}{\ln 2} = \frac{2,77 \cdot 10^9\ \mathrm{s}}{\ln 2} = 4,00 \cdot 10^9\ \mathrm{s}.$$

b. Il campione di plutonio in esame contiene un numero n di moli dato da

$$n = \frac{100\ \mathrm{g}}{238\ \mathrm{g/mol}} = 0,420\ \mathrm{mol}.$$

Quindi il numero N_0 di nuclei di plutonio-238 presenti nel campione è

$$N_0 = n N_A = (0,420\ \mathrm{mol})(6,022 \cdot 10^{23}\ \mathrm{mol}^{-1}) = 2,53 \cdot 10^{23}.$$

Il tempo di dimezzamento del plutonio-238 è di quasi 98 anni. Quindi, per intervalli di tempo ragionevoli, è possibile considerare costante al valore N_0 il numero di nuclei contenuti nel campione; così la sua attività A risulta

$$A = \frac{N_0}{\tau} = \frac{2,53 \cdot 10^{23}}{4,00 \cdot 10^9\ \mathrm{s}} = 6,33 \cdot 10^{13}\ \mathrm{Bq} = 63,3\ \mathrm{TBq}.$$

c. La potenza P erogata dal campione è, quindi,

$$P = AE = (6,33 \cdot 10^{13}\ \mathrm{Bq})(5,593 \cdot 10^6\ \mathrm{eV})\left(1,60 \cdot 10^{-19}\ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{eV}}\right) = 56,6\ \mathrm{W}.$$

La quantità di energia Q espressa dal campione radioattivo in un minuto è, quindi

$$Q = P\Delta t = (56,6\ \mathrm{W})(60,0\ \mathrm{s}) = 3,40 \cdot 10^3\ \mathrm{J};$$

il corrispondente aumento di temperatura risulta

$$\Delta T = \frac{Q}{mc} = \frac{3,40 \cdot 10^3\ \mathrm{J}}{(0,100\ \mathrm{kg})\left(130 \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg} \cdot \mathrm{K}}\right)} = 262\ \mathrm{K}.$$

d. Il volume V del campione di plutonio è

$$V = \frac{m}{d} = \frac{100\ \mathrm{g}}{19,8\ \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}} = 5,05\ \mathrm{cm}^3.$$

Il raggio di una sfera con questo volume risulta

$$r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot (5,05\ \mathrm{cm}^3)}{4\pi}} = 1,06\ \mathrm{cm},$$

per cui la superficie S della sfera è

$$S = 4\pi r^2 = 4\pi\left(1{,}06\ \text{cm}\right)^2 = 14{,}1\ \text{cm}^2 = 1{,}41\cdot 10^{-3}\ \text{m}^2.$$

Applicando la legge di Stefan-Boltzmann, uguagliamo la potenza in ingresso con quella emessa per irradiamento e otteniamo

$$zST^4 = P,$$

da cui

$$T = \sqrt[4]{\frac{P}{zS}} = \sqrt[4]{\frac{56{,}6\ \text{W}}{\left[5{,}67\cdot 10^{-8}\ \text{W}/\left(\text{m}^2\cdot\text{K}^4\right)\right]\times\left(1{,}41\cdot 10^{-3}\ \text{m}^2\right)}} = 917\ \text{K}.$$

6 Problema

a. ${}^{210}_{84}\text{Po} \to {}^{206}_{82}\text{Pb} + {}^{4}_{2}\text{He}$

b. La massa dell'elettrone è 2000 volte più piccola della massa del nucleone. Quindi l'errore che si commette utilizzando le masse atomiche invece delle masse nucleari è trascurabile, in particolare per nuclei così pesanti.

c. $\Delta E = m_{\text{Po}} - m_{\text{Pb}} - m_{\text{He}} = 209{,}98286\ \text{u} - 205{,}97446\ \text{u} - 4{,}002603\ \text{u} = 0{,}0058\ \text{u}$

$1\ \text{u} \equiv 930\ \text{MeV} \Rightarrow \Delta E = 5{,}4\ \text{MeV}$

d. La costante di decadimento è legata all'emivita (per il polonio 138 giorni, ovvero $1{,}2 \cdot 10^7$ s) dalla seguente relazione

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}.$$

Si ha quindi

$$\lambda_{\text{Po}} = \frac{\ln 2}{1{,}2\cdot 10^7\ \text{s}} = 5{,}8\cdot 10^{-8}\ \text{s}^{-1}.$$

e. L'attività a un certo istante è legata all'attività iniziale dalla seguente relazione $A(t) = A_0\, e^{-\lambda t}$. Vogliamo sapere dopo quanti giorni l'attività si è ridotta a un decimo di quella iniziale, ovvero

$$A(t) = \frac{1}{10}A_0.$$

Dalla formula sopra otteniamo

$$\frac{A_0}{10} = A_0 e^{-\lambda t} \quad\Rightarrow\quad e^{-\lambda t} = \frac{1}{10}\lambda t = \ln 10 \quad\Rightarrow\quad t = \frac{\ln 10}{\lambda} = 4{,}0\cdot 10^7\ \text{s} \simeq 460\ \text{giorni}.$$

7 Problema

a. $^{241}_{94}\text{Pu} \to \text{e}^- + {}^{241}_{95}\text{Am}$; $\quad ^{241}_{95}\text{Am} \to \alpha + {}^{237}_{93}\text{Np}$

b. Tutto il $^{241}_{94}\text{Pu}$ presente durante la formazione del Sistema Solare è decaduto, perché il suo tempo di dimezzamento è piccolissimo rispetto all'età del Sistema Solare (circa 4,5 miliardi di anni). In altri termini: dalla formazione del Sistema Solare sono trascorsi circa

$$\frac{4{,}5 \cdot 10^9 \text{ anni}}{14{,}29 \text{ anni}} = 3{,}15 \cdot 10^8 \text{ tempi di dimezzamento del } ^{241}_{94}\text{Pu}.$$

Per quanto grande fosse il numero N_{iniz} di atomi di presenti inizialmente, dopo $3{,}15 \cdot 10^8$ tempi di dimezzamento la loro quantità attuale è nulla:

$$N_{\text{pres}} = \frac{N_{\text{iniz}}}{2^{3{,}15 \cdot 10^8}} \approx 0.$$

c. $$E = \Delta m c^2 = \left(m_{\text{Am}} - m_\alpha - m_{\text{Np}}\right)c^2 =$$

$$= \left(241{,}056829 \text{ u} - 4{,}002603 \text{ u} - 237{,}048174 \text{ u}\right)\left[\left(931{,}5 \frac{\text{MeV}}{c^2}\text{u}\right)c^2\right] = 5{,}637 \text{ MeV}.$$

d. L'attività $R(t)$ di un campione è il numero di decadimenti al secondo che avvengono nel campione all'istante t. Quindi

$$R(t) = \left|\frac{dN(t)}{dt}\right|.$$

Ma per la legge del decadimento radioattivo

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t},$$

quindi

$$R(t) = \left|\frac{dN(t)}{dt}\right| = N_0 \left|\frac{de^{-\lambda t}}{dt}\right| = \lambda N_0 e^{-\lambda t} = \lambda N(t).$$

e. La costante di decadimento è

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} = \frac{\ln 2}{\left(14{,}3 \text{ anni}\right)\left(3{,}15 \cdot 10^7 \text{ s/anno}\right)} = 1{,}53 \cdot 10^{-9} \text{ s}^{-1}.$$

Quindi il numero di nuclei di $^{241}_{94}\text{Pu}$ presenti dopo 10 anni è

$$N = \frac{R}{\lambda} = \frac{5 \cdot 10^{15} \text{ Bq}}{1{,}53 \cdot 10^{-9} \text{ s}^{-1}} = 3{,}25 \cdot 10^{24} \text{ nuclei}.$$

PROBLEMI ESPERTI

8 Problema esperto

a. Tenendo conto del numero atomico del radon e delle caratteristiche delle particelle alfa, possiamo scrivere la reazione

$$^{222}_{86}\mathrm{Rn} \rightarrow {}^{118}_{84}\mathrm{Po} + {}^{4}_{2}\mathrm{He}.$$

b. Consideriamo, per esempio, i due dati numerici

(t_1, A_1) = (2,0 giorni, 0,35 Bq)

e

(t_2, A_2) = (7,0 giorni, 0,14 Bq).

Allora abbiamo:

$$\begin{cases} A_1 = \dfrac{N(t_1)}{\tau} = \dfrac{N_0\, e^{-\frac{t_1}{\tau}}}{\tau} \\[2ex] A_2 = \dfrac{N(t_2)}{\tau} = \dfrac{N_0\, e^{-\frac{t_2}{\tau}}}{\tau} \end{cases}$$

Visto che non conosciamo né N_0 né τ, conviene dividere le equazioni membro a membro, ottenendo

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{e^{-\frac{t_1}{\tau}}}{e^{-\frac{t_2}{\tau}}} = e^{\frac{t_2-t_1}{\tau}},$$

da cui si trova

$$\tau = \frac{t_2 - t_1}{\ln\left(A_1/A_2\right)} = \frac{5{,}0 \cdot 24 \cdot 3600\ \mathrm{s}}{\ln\left(0{,}35/0{,}14\right)} = 4{,}7 \cdot 10^5\ \mathrm{s}.$$

Il valore tabulato si scriverebbe, con due cifre significative, come $4{,}8 \cdot 10^5\ \mathrm{s}.$ Date le incertezze di lettura del grafico, l'errore di una unità sull'ultima cifra significativa è perfettamente accettabile.

c. Il difetto di massa ΔM su una mole di radon-222 risulta

$$\Delta M = \left(222{,}01758 - 218{,}00897 - 4{,}00260\right)\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{mol}} = 0{,}00601\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{mol}} = 6{,}01 \cdot 10^{-6}\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{mol}}.$$

Possiamo così ricavare il difetto di massa Δm relativo a un solo decadimento, che risulta

$$\Delta m = \frac{\Delta M}{N_A} = \frac{6{,}01 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{kg/mol}}{6{,}02214 \cdot 10^{23}\ \mathrm{mol}^{-1}} = 9{,}98 \cdot 10^{-30}\ \mathrm{kg}.$$

L'energia liberata è, quindi,

$$\Delta E = \Delta m c^2 = \left(9{,}98 \cdot 10^{-30}\ \mathrm{kg}\right)\left(2{,}99792 \cdot 10^8\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2 = 8{,}97 \cdot 10^{-13}\ \mathrm{J}.$$

d. La stessa energia si può esprimere in MeV come

$$\Delta E = 8{,}97 \cdot 10^{-13}\ \text{J} = \frac{8{,}97 \cdot 10^{-13}\ \text{J}}{1{,}60218 \cdot 10^{-19}\ \text{J/eV}} = 5{,}60 \cdot 10^{6}\ \text{eV} = 5{,}60\ \text{MeV}.$$

Entro le cifre significative, il valore è in ottimo accordo con quello dato in letteratura.

9 Problema esperto

a. Gli isotopi di europio si trasformano in samario per cattura K e in gadolinio via decadimento beta. Le reazioni di decadimento sono:

$${}^{150}_{63}\text{Eu} + e \to {}^{150}_{62}\text{Sm} + \nu$$

$${}^{152}_{63}\text{Eu} + e \to {}^{152}_{62}\text{Sm} + \nu$$

$${}^{152}_{63}\text{Eu} + e \to {}^{152}_{64}\text{Gd} + e$$

b. Il modello di Bohr si applica per atomi o ioni con un solo elettrone orbitante intorno a un nucleo con Z protoni. In questo caso gli atomi di europio non sono ionizzati e quindi hanno 63 elettroni.

c. Gli elettroni più esterni si trovano nel livello 6 s. Applicando la formula di Bohr otteniamo

$$E_{n=6} = (-13{,}6\ \text{eV})\frac{63^2}{6^2} \simeq 1{,}5 \cdot 10^{3}\ \text{eV}.$$

Per sapere a quale regione dello spettro appartengono questi fotoni calcoliamo la frequenza:

$$f = \frac{E}{h} = \frac{1500 \cdot 1{,}602 \cdot 10^{-19}\ \text{J}}{6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \text{J} \cdot \text{s}} = 3{,}62 \cdot 10^{17}\ \text{Hz},$$

ovvero raggi X.

d. $A = \lambda_{\text{Eu}} \cdot N$, dove N è il numero di atomi contenuti nel campione. Per calcolare il numero di atomi presenti in 1 mg di europio basta osservare che 1 mole di europio ha massa pari al numero di massa atomico, ovvero m_{molare} = 150 g, e che una mole di materiale contiene un numero di Avogadro di atomi. Il numero di atomi in 1 mg di europio è quindi

$$N = \frac{m_{\text{Eu}}}{m_{\text{molare}}} N_A = \frac{1 \cdot 10^{-3}\ \text{g}}{150\ \text{g/mol}}\left(6{,}023 \cdot 10^{23}\ \text{mol}^{-1}\right) = 4{,}0 \cdot 10^{18}.$$

L'attività è dunque

$$A = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} N = \frac{\ln 2}{1{,}15 \cdot 10^{9}\ \text{s}} \cdot 4{,}0 \cdot 10^{18} = 2{,}4 \cdot 10^{9}\ \text{Bq}.$$

e. L'attività indica il numero di decadimenti al secondo. Nel caso in esame, il campione è composto da una mistura di due isotopi di europio. L'attività è quindi la somma delle attività dei due isotopi, ovvero, ad un certo istante t, abbiamo

$$A(t) = A_{150}(t) + A_{152}(t) = \lambda_{150} N_{150}(t) + \lambda_{152} N_{152}(t).$$

Con i dati del problema abbiamo

$A(t=0) \equiv A_0 = \lambda_{150} N_{150}(t=0) + \lambda_{152} N_{152}(t=0) = 60 \text{ Bq};$

$A(t=100y) \equiv A_{100} = \lambda_{150} N_{150}(t=100y) + \lambda_{152} N_{152}(t=100y) = 60 \text{ Bq}.$

Riscrivendo il numero di atomi a t =100 y in termini del numero di atomi iniziali, il sistema diventa

$$\begin{cases} A(0) = \lambda_{150} N_{150}(t=0) + \lambda_{152} N_{152}(t=0) \\ A_{100} = \lambda_{150} N_{150}(t=0) e^{-\lambda_{150}\Delta t} + \lambda_{152} N_{152}(t=0) e^{-\lambda_{152}\Delta t} \end{cases}$$

dove Δt =100 y ≡ 3,15 · 10^9 s.

Risolvendo il sistema rispetto alle incognite $N_{150}(t = 0)$ e $N_{152}(t = 0)$ si ottiene

$$\begin{cases} N_{150}(t=0) = 6{,}5 \cdot 10^{11} \\ N_{152}(t=0) = 1{,}3 \cdot 10^{11}. \end{cases}$$

10 Problema esperto

a. $^{235}_{92}\text{U} + \text{n} \rightarrow {}^{137}_{55}\text{Cs} + {}_{37}\text{Rb} + 4\text{n}$

$$E = \Delta mc^2 = \left(m_\text{U} - m_\text{Cs} - m_\text{Rb} - m_\text{n}\right)c^2 =$$

$$= \left(235{,}043930 \text{ u} - 136{,}907089 \text{ u} - 94{,}929260 \text{ u} - 3 \cdot 1008665 \text{ u}\right)\left[\left(931{,}5 \,\frac{\text{MeV}}{c^2}\text{u}\right)c^2\right] =$$

$$= 169 \text{ MeV}.$$

b. Senza neutroni, la sola interazione forte tra protoni non sarebbe in grado di vincere la loro repulsione elettrostatica. I neutroni contribuiscono ad aumentare l'energia di legame del nucleo perché sono nucleoni e come tali subiscono l'interazione forte, senza aumentare la repulsione elettrostatica in quanto non hanno carica elettrica.

c. Per entrambi il tempo di dimezzamento è circa

$T_{1/2} \approx 10^9 \text{ s} \approx 30 \text{ anni}.$

Quindi l'attività delle scorie dovuta a questi isotopi rimane significativa per vari decenni dopo l'estrazione dal reattore. Si può stimare un periodo di attenzione pari a circa qualche tempo di dimezzamento, ossia circa 1 secolo.

d. L'attività R di un campione è legata alla costante di decadimento λ e al numero N di nuclei presenti dalla relazione $R = \lambda N$. Per il cesio

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}},$$

quindi il numero di nuclei di cesio presenti è

$$N = \frac{R}{\lambda} = \frac{R}{\frac{\ln 2}{T_{1/2}}} = \frac{RT_{1/2}}{\ln 2} = \frac{\left(1{,}0 \cdot 10^{16}\ \text{Bq}\right)\left(9{,}6 \cdot 10^{8}\ \text{s}\right)}{\ln 2} = 1{,}4 \cdot 10^{25}$$

che corrispondono a

$$n = \frac{1{,}4 \cdot 10^{25}}{6{,}0 \cdot 10^{23}} = 23\ \text{mol.}$$

La massa di cesio presente in 1 t di combustibile nucleare esausto è quindi
M = (137 g/mol)(23 mol) = 3,2 kg.