QUESITI

1 Quesito

Lo schema A è impossibile perché per ogni punto dello spazio passa una sola linea di forza.
Lo schema C è impossibile perché una linea di forza dev'essere orientata come il campo elettrico e quindi non può avere due orientazioni opposte.
Lo schema D è impossibile perché esiste un unico campo elettrico in un punto *P*.

2 Quesito

a. $E = \dfrac{F}{q} = \dfrac{5{,}2 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{N}}{1{,}8 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{C}} = 290\ \mathrm{N/C}$

b. Per il teorema di Gauss, il flusso attraverso una superficie chiusa dipende solo dalle cariche in essa contenute, in questo caso q. Pertanto:

$$\Phi_S = \frac{q}{\varepsilon_0} = \frac{1{,}8 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{C}}{8{,}85 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{C^2/(N \cdot m^2)}} = 2{,}0 \cdot 10^{6}\ (\mathrm{N \cdot m^2})/\mathrm{C}$$

PROBLEMI

3 Problema

a. Se la carica q è posta oltre B nel verso scelto come positivo, la repulsione della carica Q (rivolta verso le x crescenti) prevale sull'attrazione della carica $-Q$, che è più lontana. Quindi la forza totale è rivolta nel verso positivo delle x.
In posizione simmetrica rispetto al centro del segmento AB, l'attrazione di $-Q$ su q è rivolta nel verso positivo delle x e prevale rispetto alla repulsione dovuta a Q, che è più lontana. Quindi la risultante delle forze è rivolta ancora una volta verso le x crescenti.
Infine, nei punti P compresi tra A e B l'attrazione di $-Q$ e la repulsione di Q sono concordi, entrambe rivolte da B verso A, e quindi anche la forza totale ha questo verso.

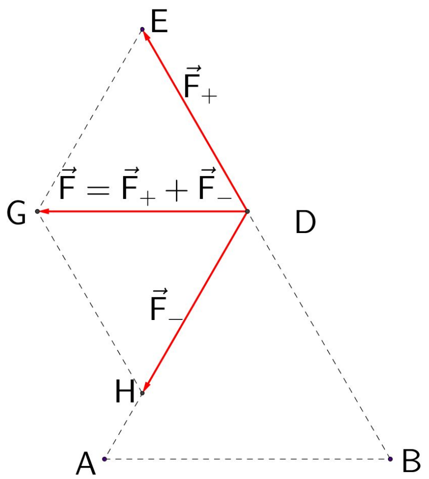
b. Quando la carica q è posta nel punto medio tra A e B ha distanza $d/2$ da entrambe le cariche che formano il dipolo. La forza totale $\vec{F}_{tot}$ ha la direzione dell'asse x, verso rivolto da B ad A e modulo pari al doppio del valore F_1 di ciascuna delle due forze di Coulomb che agiscono su q.
Quindi possiamo calcolare

$$F_{tot} = 2\,F_1 = 2\,k_0 \frac{qQ}{\left(d/2\right)^2} = 8\,k_0 \frac{qQ}{d^2}.$$

c. Nella condizione descritta, la forza totale $\vec{F}_C$ ha la direzione e il verso dell'asse x, mentre il modulo della forza è la differenza dei valori delle due forze $\vec{F}_B$ e $\vec{F}_A$ dovute rispettivamente alle cariche poste in B e in A:

$$F_C = F_A - F_B = k_0 \frac{qQ}{d^2} - k_0 \frac{qQ}{(2d)^2} = k_0 \frac{qQ}{d^2}\left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{4} k_0 \frac{qQ}{d^2}.$$

d. La figura seguente mostra il diagramma vettoriale relativo alle forze in gioco. Le forze $\vec{F}_+$ (dovuta alla carica in B) e $\vec{F}_-$ (generata dalla carica in A) hanno lo stesso modulo e formano tra loro un angolo di 120°. Così, il parallelogramma delle forze *DEGH* è l'unione di due triangoli equilateri e, in definitiva, la forza risultante $\vec{F} = \vec{F}_+ + \vec{F}_-$ ha lo stesso modulo delle due forze precedenti.



Così si trova

$$F = F_+ = F_- = k_0 \frac{qQ}{d^2}.$$

4 Problema

a. Prima di tutto notiamo che, affinché il campo elettrico totale possa essere nullo, il campo generato dal piano e quello della sfera devono avere la stessa direzione: al di fuori della retta che contiene a i due campi hanno direzioni diverse e quindi è impossibile che la loro somma sia nulla.
Il verso del campo generato dal piano di carica è uscente dal piano; quello della sfera di carica è rivolto verso C: l'unico segmento di a, contenuto nella sfera, in cui i due campi hanno verso opposto è quello compreso tra C e l'estremità della sfera che si trova dal lato più lontano da piano.

b. Con le premesse esposte sopra sulla direzione e sul verso dei due campi, per avere una somma nulla è ulteriormente necessario che i due campi abbiano lo stesso modulo. Quindi possiamo scrivere la condizione

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|Q|}{R^3}\frac{R}{2}=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0},$$

da cui

$$|Q|=4\pi\sigma R^2$$

e quindi, essendo Q negativa,

$$Q=-4\pi\sigma R^2.$$

c. L'unica altra zona di a in cui i due campi hanno la stessa direzione e versi opposti è quella posta all'esterno della sfera, dalla parte opposta rispetto al piano di carica. Trovandosi al di fuori della sfera, la condizione di uguaglianza dei moduli diventa

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|Q|}{x^2}=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0},$$

dove x è la distanza incognita $\overline{CP}$. Sfruttando il risultato precedente scriviamo

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{4\pi\sigma R^2}{x^2}=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

e otteniamo quindi il risultato $x=\sqrt{2}\,R$.

d. Sul prolungamento di a nell'altro semispazio delimitato dal piano di carica i due campi (del piano e della sfera) hanno la stessa direzione e versi opposti. Ma la distanza dei punti del prolungamento di a da C è maggiore di $2R$ e quindi, a maggior ragione, maggiore di $R\sqrt{2}$. Quindi il campo generato dalla sfera negativa di carica è troppo debole per equilibrare quello del piano di carica.

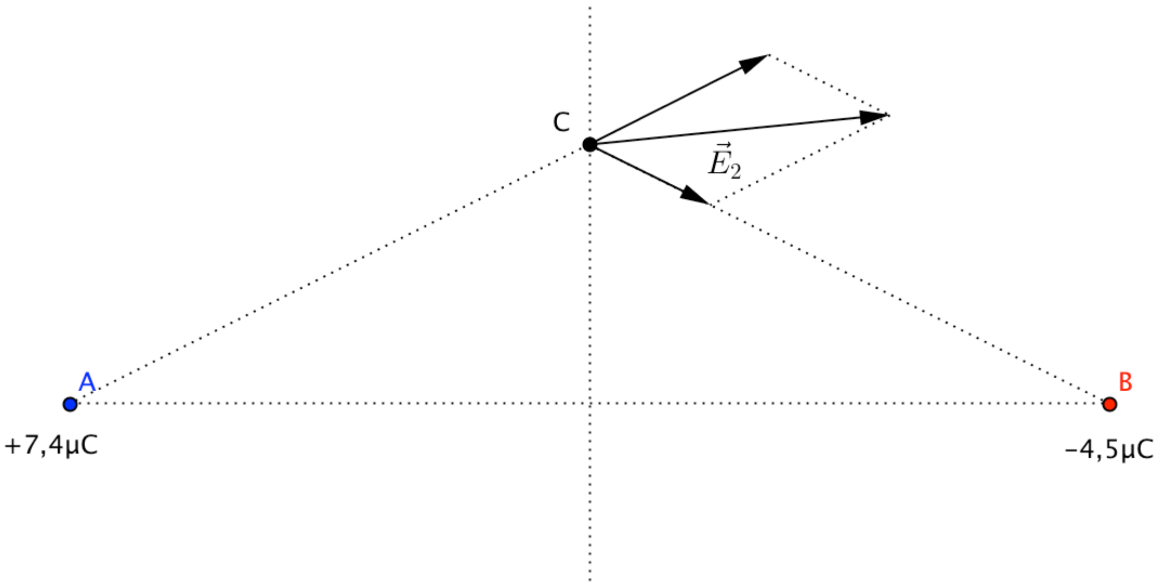
5 Problema

a. Per il terzo principio della dinamica, $\vec{F}_{21}=-\vec{F}_{12}$.

b. $d=\sqrt{\dfrac{kq_1q_2}{F_{12}}}=\sqrt{\dfrac{(8{,}99\cdot 10^9\ \mathrm{N\cdot m^2/C^2})(7{,}4\cdot 10^{-6}\ \mathrm{C})(4{,}5\cdot 10^{-6}\ \mathrm{C})}{0{,}56\ \mathrm{N}}}=0{,}73\ \mathrm{m}$

c. No, perché le due cariche hanno segno opposto e nel segmento AB generano campi elettrici aventi la stessa direzione (quella della retta passante per le due cariche) e lo stesso verso (dalla carica q_1 alla carica q_2).

d. $\vec{E}_1$ non può essere il campo elettrico totale in C. Infatti tale campo deve essere compreso nell'angolo formato dalla retta AC e dalla retta CB, come mostra il disegno seguente:



e. Per il teorema di Gauss, attraverso S_1:

$$\Phi(\vec{E}) = \frac{(q_1 + q_2)}{\varepsilon_0} = \frac{(+7,4 \cdot 10^{-6}\,\text{C} - 4,5 \cdot 10^{-6}\,\text{C})}{8,85 \cdot 10^{-12}\ \text{C}^2/(\text{N} \cdot \text{m}^2)} = 3,28 \cdot 10^5\,(\text{N} \cdot \text{m}^2)/\text{C};$$

attraverso S_2:

$$\Phi(\vec{E}) = \frac{q_2}{\varepsilon_0} = \frac{(-4,5 \cdot 10^{-6}\,\text{C})}{8,85 \cdot 10^{-12}\ \text{C}^2/(\text{N} \cdot \text{m}^2)} = -5,08 \cdot 10^5\,(\text{N} \cdot \text{m}^2)/\text{C}.$$

6. Problema

a. Il modulo della forza che una carica esercita sull'altra è dato da $F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1 Q_2}{d^2}$, la direzione è lungo la congiungente le due cariche e la forza è attrattiva.
Con i dati del problema, il modulo della forza vale

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(-3,5 \cdot 10^{-9}\,\text{C})(2,6 \cdot 10^{-9}\,\text{C})}{(0,32\,\text{m})^2} = -8 \cdot 10^{-7}\,\text{N},$$

dove il segno meno rispecchia il fatto che la forza è attrattiva.

b. Il campo elettrico prodotto dalla carica Q_1 è in modulo $E_1(r) = \frac{F}{Q_2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1}{r}$, è radiale ed entrante.

Il campo elettrico prodotto dalla carica Q_2 formula è in modulo $E_2(r) = \frac{F}{Q_1} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_2}{r}$, è radiale e uscente dalla carica. Il campo elettrico totale nel punto medio del segmento congiungente le due cariche è dato da

$$E_{tot}\left(\frac{d}{2}\right)=E_1\left(\frac{d}{2}\right)+E_2\left(\frac{d}{2}\right)=\frac{\left(Q_1-Q_2\right)}{4\pi\varepsilon_0\left(d/2\right)^2}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\left(-3{,}5\cdot10^{-9}\ \mathrm{C}\right)-\left(2{,}6\cdot10^{-9}\ \mathrm{C}\right)}{\left(0{,}16\ \mathrm{m}\right)^2}=-2{,}1\cdot10^3\ \mathrm{N/C}.$$

c. Il numero di linee di forza entranti nella prima carica è minore del numero di linee di forza uscenti dalla seconda carica, in quanto la densità di linee della forza rappresenta graficamente l'intensità della forza.

d. Applicando il teorema di Gauss abbiamo $\Phi\left(\vec{E}\right)=\dfrac{Q_2}{\varepsilon_0}=2{,}9\ \mathrm{N\cdot m^2/C}$.

e. Il campo elettrico prodotto dalle due cariche lungo la retta congiungente ha la stessa direzione e lo stesso verso e i moduli dei campi elettrici sono sempre non nulli. Di conseguenza, il campo elettrico totale, dato dalla somma di due quantità con lo stesso segno e mai nulle, non si annulla mai.

PROBLEMI ESPERTI

7. Problema esperto

a. I dati sperimentali del grafico corrispondono alle coppia di valori ($3{,}0 \cdot 10^{-2}$ m; $8{,}6 \cdot 10^{-5}$ N), ($5{,}0 \cdot 10^{-2}$ m; $3{,}1 \cdot 10^{-5}$ N), ($8{,}0 \cdot 10^{-2}$ m; $1{,}2 \cdot 10^{-5}$ N) e ($1{,}0 \cdot 10^{-1}$ m; $7{,}8 \cdot 10^{-6}$ N). Visto che si tratta della forza tra due cariche puntiformi, conviene moltiplicare in tutti i casi il valore dell'ordinata per il quadrato dell'ascissa. Otteniamo:

$$\left(8{,}6\cdot10^{-5}\ \mathrm{N}\right)\left(3{,}0\cdot10^{-2}\ \mathrm{m}\right)^2=7{,}7\cdot10^{-8}\ \mathrm{N\cdot m^2},$$

$$\left(3{,}1\cdot10^{-5}\ \mathrm{N}\right)\left(5{,}0\cdot10^{-2}\ \mathrm{m}\right)^2=7{,}8\cdot10^{-8}\ \mathrm{N\cdot m^2},$$

$$\left(1{,}2\cdot10^{-5}\ \mathrm{N}\right)\left(8{,}0\cdot10^{-2}\ \mathrm{m}\right)^2=7{,}7\cdot10^{-8}\ \mathrm{N\cdot m^2},$$

$$\left(7{,}8\cdot10^{-6}\ \mathrm{N}\right)\left(1{,}0\cdot10^{-1}\ \mathrm{m}\right)^2=7{,}8\cdot10^{-8}\ \mathrm{N\cdot m^2}.$$

Entro gli errori sperimentali e di approssimazione è così confermato che i valori in ordinata sono inversamente proporzionali al quadrato di quelli in ascissa, per cui la legge sperimentale che si deduce dal grafico ha la forma

$$F=\frac{7{,}8\cdot10^{-8}\ \mathrm{N\cdot m^2}}{r^2}.$$

b. Con il valore $r = 6{,}0 \cdot 10^{-2}$ m si ottiene una forza di repulsione di modulo

$$F(6{,}0\ \mathrm{cm})=\frac{7{,}8\cdot10^{-8}\ \mathrm{N\cdot m^2}}{\left(6{,}0\cdot10^{-2}\ \mathrm{m}\right)^2}=2{,}2\cdot10^{-5}\ \mathrm{N}.$$

c. Le cariche richieste si possono dedurre dalla seguente tabella

	Sferetta *A*	**Sferetta *B***	**Sferetta *C***
Cariche iniziali	Q	0	0
Cariche intermedie 1	$Q/2$	$Q/2$	
Cariche intermedie 2	$Q/2$	$Q/4$	$Q/4$
Cariche finali	$3Q/8$	$Q/4$	$3Q/8$

d. Esaminando la tabella precedente possiamo scrivere

$$\frac{7{,}8 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{N \cdot m^2}}{r^2} = k_0 \frac{\left(\frac{3}{8}Q\right)\left(\frac{Q}{4}\right)}{r^2} = k_0 \frac{3}{32}\frac{Q^2}{r^2}.$$

Uguagliando il primo e l'ultimo termine della precedente catena di uguaglianze troviamo

$$k_0 \frac{3}{32} Q^2 = 7{,}8 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{N \cdot m^2},$$

da cui otteniamo

$$Q = \sqrt{\frac{32 \cdot \left(7{,}8 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{N \cdot m^2}\right)}{3k_0}} = \sqrt{\frac{32 \cdot \left(7{,}8 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{N \cdot m^2}\right)}{3 \cdot \left(8{,}99 \cdot 10^{9}\ \mathrm{N \cdot m^2/C^2}\right)}} = 9{,}6 \cdot 10^{-9}\ \mathrm{C} = 9{,}6\ \mathrm{nC}.$$

Le altre due cariche richieste sono, quindi,

$$Q_A = \frac{3}{8}Q = \frac{3}{8} \cdot \left(9{,}6 \cdot 10^{-9}\ \mathrm{C}\right) = 3{,}6 \cdot 10^{-9}\ \mathrm{C} = 3{,}6\ \mathrm{nC}.$$

e

$$Q_B = \frac{1}{4}Q = \frac{1}{4} \cdot \left(9{,}6 \cdot 10^{-9}\ \mathrm{C}\right) = 2{,}4 \cdot 10^{-9}\ \mathrm{C} = 2{,}4\ \mathrm{nC}.$$

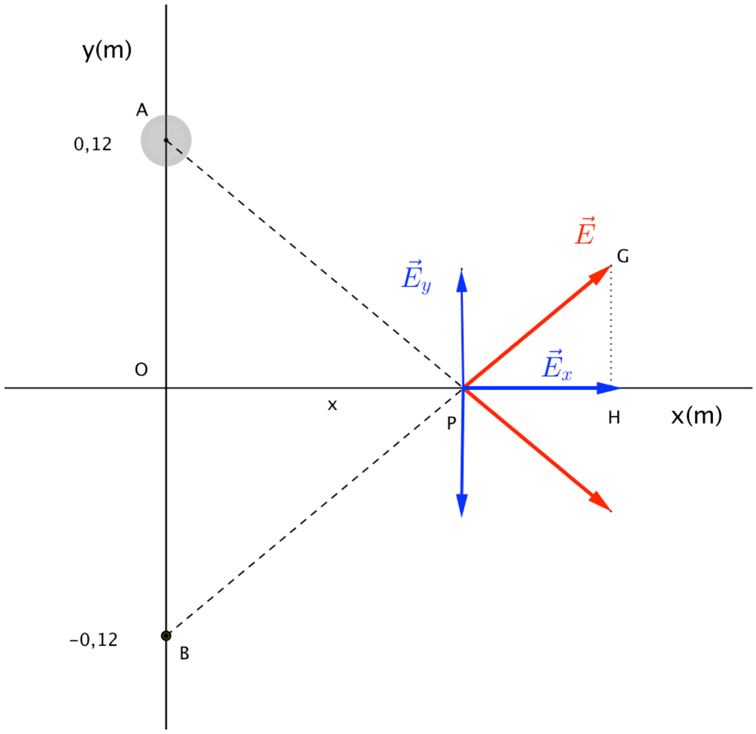
8 Problema esperto

a. All'esterno della sfera, il campo elettrico è quello di una carica puntiforme $Q = 2{,}8$ nC posta nel centro A. Poiché le due cariche Q e q sono uguali, il campo elettrico totale è nullo nel punto medio del segmento $\overline{AB}$.

b. In ogni punto $P = (x, 0)$ i campi creati dalla carica e dalla sfera sono l'uno simmetrico all'altro rispetto all'asse x. Pertanto il campo elettrico totale ha componenti $\vec{E}_t = (2E_x, 0)$, dove

$$E_x = E\frac{\overline{PO}}{\overline{PB}},$$

con $E = \left(8{,}99 \cdot 10^{9}\ \mathrm{N \cdot m^2/C^2}\right)\left(2{,}8 \cdot 10^{-9}\ \mathrm{C}\right)\dfrac{1}{\left(0{,}12\ \mathrm{m}\right)^2 + x^2}$, $\overline{PO} = x$ e $\overline{PB} = \sqrt{\left(0{,}12\ \mathrm{m}\right)^2 + x^2}$.



Sostituendo si ottiene

$$E_t = \left(50{,}4\ \mathrm{N\cdot m^2/C}\right)\frac{x}{\left[\left((0{,}12\ \mathrm{m})^2 + x^2\right)\right]^{3/2}}.$$

c. In ogni punto dell'asse x, i campi elettrici della sfera e della particella hanno la stessa componente x mentre le rispettive componenti y sono uguali e opposte. Per il principio di sovrapposizione, la risultante è sempre diretta lungo l'asse x, nel verso positivo per i punti con $x > 0$ e nel verso negativo per gli altri.

d. La particella viene accelerata nel verso positivo dell'asse x: l'accelerazione prima cresce, poi decresce restando positiva, per cui la velocità della particella aumenta nel tempo.

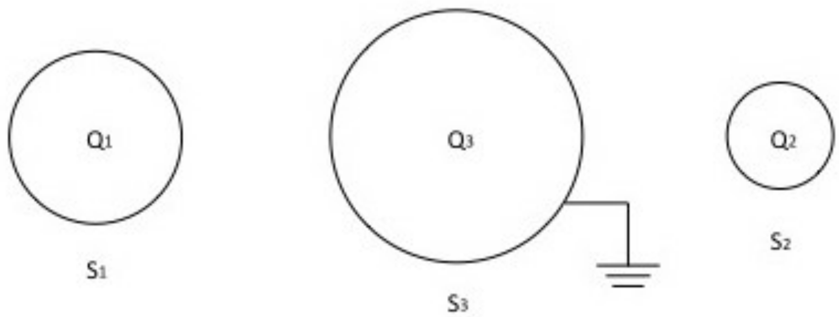
e. L'accelerazione massima è $a_{\max} = \dfrac{F_{\max}}{m} = \dfrac{q_1 E_{\max}}{m}$. Dal grafico si deduce che il valore massimo del modulo E del campo elettrico è circa 1350 N/C nel punto $x = 0{,}085$ m. Quindi

$$a_{\max} = \frac{\left(1{,}3\cdot 10^{-9}\ \mathrm{C}\right)\left(1350\ \mathrm{N/C}\right)}{2{,}4\cdot 10^{-3}\ \mathrm{kg}} = 7{,}3\cdot 10^{-4}\ \mathrm{m/s^2}.$$

9 Problema esperto

a. Avvicinando le due sfere, la sfera metallica più piccola e non carica si elettrizza per induzione; le cariche negative migrano verso la sfera carica e quello positive migrano dalla parte opposta; essendo collegata a terra, gli elettroni liberi possono fluire lungo il filo dalla terra nella sfera. staccando il filo e allontanando la sfera piccola dalla sfera grande, la sfera piccola rimane carica negativamente.

b. La sfera S_2 ha una carica indotta per induzione $Q_2 < Q_1$. Ponendo la terza sfera tra le sfere S_1 e S_2 e collegandola a terra (vedi figura) la sfera si caricherà di carica $Q_3 < Q_1 + Q_2$.



c. Il campo elettrico generato dalla sfera è radiale, uscente e in modulo $E(r) = \dfrac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r}$.

La forza agente sull'elettrone è quindi $-\dfrac{eQ_1}{4\pi\varepsilon_0 r} = -4{,}2 \cdot 10^{-19}$ N.

d. • Il campo elettrico appena fuori dalla sfera S_1 è il campo generato da una sfera carica positivamente;
• il campo elettrico a grande distanza da S_1 è sostanzialmente il campo da essa generato, ovvero non risente dell'influenza dell'altra sfera.

e. Il campo elettrico nel punto medio della congiungente i centri delle due sfere è dato dal principio di sovrapposizione $\vec{E}_{tot} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$. Poniamo l'asse x lungo la congiungente dei punti medi delle sfere. Il campo elettrico generato rispettivamente dalle due sfere è in modulo $E_1(x) = \dfrac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 x}$ e

$E_2(x) = \dfrac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 x} = \dfrac{0{,}1 Q_1}{4\pi\varepsilon_0 x}$, da cui $E_{tot}(x = 1\,\text{m}) = \dfrac{Q_1 + Q_2}{4\pi\varepsilon_0 x} = \dfrac{1{,}1 Q_1}{4\pi\varepsilon_0 x} = 1{,}3\,\text{kN/C}$. La direzione e il verso del campo elettrico totale sono quelli del campo elettrico generato dalla sfera S_1.

10 Problema esperto

a. La distribuzione piana deve contenere cariche positive, in modo da respingere la pallina in direzione diagonale (in alto a destra, facendo riferimento alla figura).

b. L'accelerazione impressa alla pallina dalla forza elettrostatica può essere scomposta in due vettori componenti, uno orizzontale e uno verticale, che hanno lo stesso modulo a causa della geometria del problema. Il vettore componente verticale, rivolto verso l'alto, deve compensare l'accelerazione di gravità $\vec{g}$. Quindi il componente orizzontale, che è l'unico non compensato, deve avere anch'esso modulo pari a *g*.
Visto che la pallina parte da ferma, all'istante $t = 0{,}40$ s il valore della sua velocità è

$$v = g\,\Delta t = \left(9{,}8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right)(0{,}40\,\mathrm{s}) = 3{,}9\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

e la distanza percorsa è

$$\Delta s = \frac{1}{2}g\,\Delta t^2 = \frac{1}{2}\left(9{,}8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right)(0{,}40\,\mathrm{s})^2 = 0{,}78\,\mathrm{m}.$$

c. Si può immaginare di usare il flusso d'aria di un asciugacapelli per generare sulla pallina da ping-pong una forza obliqua in modo da ottenere lo stesso moto descritto nel punto precedente.

d. Il modulo dell'accelerazione dovuta al solo piano di carica è $a = g\sqrt{2}$; quindi dalla seconda legge della dinamica si ottiene

$$\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}q = ma,$$

da cui si trova

$$\sigma = \frac{2\varepsilon_0 ma}{q} = \frac{2\left[8{,}854\cdot 10^{-12}\,\mathrm{C/(N\cdot m^2)}\right](2{,}5\cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg})(9{,}8\,\mathrm{m/s^2})\sqrt{2}}{7{,}2\cdot 10^{-8}\,\mathrm{C}} = 8{,}5\cdot 10^{-6}\,\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}^2}.$$