QUESITI

1 Quesito

Il campo elettrico è conservativo, per cui il lavoro che esso compie nello spostamento di una carica non dipende dal cammino percorso, ma solo dai punti iniziale e finale. Infatti

$$L_{\infty\to C} = -Q\Delta V = -Q\left(V_C - V_\infty\right) = -\left(6{,}0\cdot 10^{-6}\ \mathrm{C}\right)\left(70\ \mathrm{V} - 0\ \mathrm{V}\right) = 4{,}2\cdot 10^{-4}\ \mathrm{J}.$$

2 Quesito

a. $$Q = \varepsilon_0 \frac{A}{d} V \quad\rightarrow\quad d = \varepsilon_0 \frac{A}{Q} V = \left(8{,}85\cdot 10^{-12}\,\mathrm{N\cdot m^2/C^2}\right)\frac{\pi(0{,}18\ \mathrm{m})^2}{2{,}4\cdot 10^{-9}\ \mathrm{C}}\left(120\ \mathrm{J/C}\right) = 4{,}5\cdot 10^{-2}\ \mathrm{m}$$

b. $$E = \frac{V}{d} = \frac{120\ \mathrm{V}}{4{,}5\cdot 10^{-2}\ \mathrm{m}} = 2{,}7\cdot 10^{3}\ \mathrm{V/m}$$

c. $$U = \frac{1}{2}QV = \frac{1}{2}\left(2{,}4\cdot 10^{-9}\ \mathrm{C}\right)\left(120\ \mathrm{V}\right) = 1{,}4\cdot 10^{-7}\ \mathrm{J}$$

PROBLEMI

3 Problema

a. La forza elettrostatica tra il piano e la pallina è orizzontale e diretta verso il piano; il suo modulo è

$$a_1 = \frac{qE}{m} = \frac{q}{m}\frac{|\sigma|}{2\varepsilon_0} = \frac{\left(8{,}92\cdot 10^{-9}\ \mathrm{C}\right)\left(5{,}31\cdot 10^{-5}\ \mathrm{C/m^2}\right)}{2\left(5{,}46\cdot 10^{-3}\ \mathrm{kg}\right)\left[8{,}854\cdot 10^{-12}\ \mathrm{C^2/(N\cdot m^2)}\right]} = 4{,}90\ \mathrm{m/s^2}.$$

Se si tiene conto anche dell'accelerazione di gravità $\vec{g}$, l'accelerazione complessiva della pallina è diagonale verso il terzo quadrante del sistema di riferimento utilizzato, con $g = 2\,a_1$. Il suo modulo è

$$a = \sqrt{a_1^2 + g^2} = \sqrt{\left(4{,}90\ \mathrm{m/s^2}\right)^2 + \left(9{,}8\ \mathrm{m/s^2}\right)^2} = 11\ \mathrm{m/s^2}.$$

b. L'energia potenziale elettrostatica del sistema dipende solo dalla differenza di ascisse tra il punto iniziale e finale in cui si trova la pallina, perché uno spostamento lungo la y comporta un lavoro nullo delle forze elettriche. Quindi, se la pallina passa dal punto O a un secondo punto A di ascissa x, per definizione si ha

$$U(A) = W_{A\to O} = +qEx = \frac{q|\sigma|}{2\varepsilon_0}x.$$

c. Il problema è matematicamente identico a quello di un sasso lanciato verso l'alto. Quindi la pallina, dopo essere stata lanciata, compie un moto rettilineo uniformemente accelerato lungo la retta di equazione $y = 2\,x$. Se poniamo uguale a zero nell'origine anche l'energia potenziale della forza-peso, possiamo scrivere l'equazione

$$K_i = mgy_f + \frac{q|\sigma|}{2\varepsilon_0}x_f = 2mgx_f + \frac{q|\sigma|}{2\varepsilon_0}x_f = \left(2mg + \frac{q|\sigma|}{2\varepsilon_0}\right)x_f,$$

da cui troviamo l'ascissa finale x_f della pallina, che risulta

$$x_f = \frac{K_i}{2mg + \frac{q|\sigma|}{2\varepsilon_0}} = \frac{2\varepsilon_0 K_i}{4mg\varepsilon_0 + q|\sigma|} = \frac{\varepsilon_0 m v_0^2}{4mg\varepsilon_0 + q|\sigma|} =$$

$$= \frac{\left[8{,}854\cdot 10^{-12}\,\mathrm{C^2/(N\cdot m^2)}\right]\left(5{,}46\cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg}\right)\left(5{,}81\,\mathrm{m/s}\right)^2}{4\left(5{,}46\cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg}\right)\left(9{,}8\,\mathrm{m/s^2}\right)\left[8{,}854\cdot 10^{-12}\,\mathrm{C^2/(N\cdot m^2)}\right] + \left(8{,}92\cdot 10^{-9}\,\mathrm{C}\right)\left(5{,}31\cdot 10^{-5}\,\mathrm{C^2/m^2}\right)} =$$

$$= 0{,}69\ \mathrm{m}.$$

Quindi il punto finale raggiunto dalla pallina è P (0,69 m;1,38 m).

d. Abbiamo

$$\overline{OP} = \sqrt{(0{,}689\ \mathrm{m})^2 + (1{,}38\ \mathrm{m})^2} = 1{,}54\ \mathrm{m}.$$

Ora impostiamo le leggi del moto rettilineo uniformemente accelerato, che nel nostro caso sono:

$$\begin{cases} 0 = v_0 - at \\ \Delta s = v_0 t - \frac{1}{2}at^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = \frac{v_0}{a} \\ \Delta s = v_0\frac{v_0}{a} - \frac{1}{2}a\left(\frac{v_0}{a}\right)^2 = \frac{v_0^2}{2a} = \frac{\left(5{,}81\,\mathrm{m/s}\right)^2}{2\left(11{,}0\,\mathrm{m/s^2}\right)} = 1{,}53\,\mathrm{m}. \end{cases}$$

Entro l'approssimazione della terza cifra significativa, il risultato è confermato.

4 Problema

a. Consideriamo una superficie gaussiana Ω tutta contenuta nello spessore della sfera più grande, dove il campo elettrico è ovunque nullo. Quindi anche il flusso di campo elettrico attraverso Ω è uguale a zero e di conseguenza è nulla anche la carica complessiva contenuta in Ω.
Visto che Ω contiene la carica $+Q$ della sfera piccola, sulla faccia interna della sfera grande deve essere presente una carica $-Q$. Per ragioni di simmetria, anche questa carica si dispone uniformemente sulla superficie.
Una carica uguale e opposta $+Q$ si è scaricata a terra.

b. Il potenziale sulla superficie e all'esterno di una sfera uniformemente carica è uguale a quello che ci sarebbe se tutta la carica della sfera fosse concentrata al suo centro. Quindi il potenziale sulla superficie (e quindi all'interno) della sfera di raggio r_1, dovuto alla carica Q, è

$$V_{+1} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r_1},$$

mentre la corrispondente grandezza per la sfera di raggio r_2 è:

$$V_{+2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r_2}.$$

c. Per la stessa ragione appena vista, il potenziale elettrico sulla sfera esterna, dovuto alla carica $-Q$, è

$$V_{-2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{-Q}{r_2} = V_{-1}.$$

Come è sintetizzato nella formula precedente, anche il potenziale dovuto a $-Q$ sulla sfera più piccola ha lo stesso valore, visto che essa è contenuta all'interno dell'altra.
Così il potenziale complessivo sulla sfera interna è

$$V_1 = V_{+1} + V_{-1} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r_1} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r_2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2},$$

mentre quello sulla sfera esterna risulta

$$V_2 = V_{+2} + V_{-2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r_2} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r_2} = 0.$$

d. La differenza di potenziale positiva tra le due sfere è

$$\Delta V = V_1 - V_2 = V_1 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2},$$

per cui la capacità C_s del condensatore sferico è

$$C_s = \frac{Q}{\Delta V} = \cancel{Q}\,\frac{4\pi\varepsilon_0 r_1 r_2}{\cancel{Q}\left(r_2 - r_1\right)} = 4\pi\varepsilon_0\frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1}.$$

La formula trovata non dipende dalle grandezze elettriche, ma piuttosto dalla forma e dalle dimensioni del condensatore. La capacità che ne risulta è grande se i due raggi sono grandi e se differiscono poco tra loro.

5. Problema

a. La capacità di un condensatore piano a facce parallele è data da

$$C = \varepsilon_r\varepsilon_0\frac{A}{d},$$

dove A è la superficie delle armature e d la distanza fra esse. Sostituendo i dati del problema si ottiene

$$C = 2{,}5\cdot 10^{-11}\ \text{F} = 25\ \text{pF}.$$

b. La carica sulle armature è data da

$$q = CV = \left(2{,}5 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{F}\right)\left(12\ \mathrm{V}\right) = 3{,}0 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{C} = 0{,}3\,\mathrm{nC}.$$

L'energia immagazzinata nel condensatore è

$$E = \frac{1}{2}CV^2 = 1{,}8 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{J}.$$

c. Costruiamo un sistema di riferimento con l'origine degli assi nella posizione iniziale della particella, l'asse x lungo la lunghezza L dell'armatura, con verso positivo verso destra, e l'asse y lungo la distanza tra le due armature, in direzione e verso del campo elettrico, ovvero verso il basso. Lungo l'asse x abbiamo un moto rettilineo uniforme, di velocità v. Lungo l'asse y abbiamo un moto uniformemente accelerato dovuto alla presenza del campo elettrico. Il moto della particella è dunque un moto parabolico, e la condizione che la particella abbia la velocità minima per uscire dal condensatore si traduce nella richiesta che il punto ($x = L$, $y = d$) appartenga alla traiettoria della particella.
L'accelerazione agente sulla particella è

$$a = \frac{qE}{m} = \frac{qV}{md}.$$

Il moto è descritto dal seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} x = vt \\ y = \dfrac{1}{2}at^2 \end{cases}.$$

La condizione per cui la particella esce dal condensatore è

$$\begin{cases} x = L \\ y = d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} vt = L \\ \dfrac{1}{2}at^2 = d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} vt = L \\ t = \sqrt{\dfrac{2d}{a}} = \sqrt{\dfrac{2d^2m}{qV}} \end{cases}.$$

La velocità minima per cui la particella esce dal condensatore è quindi

$$v = \frac{L}{t} = \frac{L}{d}\sqrt{\frac{qV}{2m}}.$$

d. Il campo elettrico nella situazione descritta è uniforme, con modulo costante, direzione perpendicolare alle armature del condensatore e verso dall'armatura positivamente carica a quella negativamente carica.
La carica del condensatore nel vuoto si può esprimere come

$$q = CV = \varepsilon_0 \frac{A}{d}V \quad \Rightarrow \quad \frac{q}{\varepsilon_0 A} = \frac{V}{d} = E.$$

Siccome il rapporto tra la carica elettrica sull'armatura del condensatore e la superficie dell'armatura è la densità superficiale di carica, si ottiene la relazione desiderata

$$\frac{\sigma}{\varepsilon_0} = E.$$

Se il dielettrico tra le armature del condensatore non è il vuoto, si procede in maniera identica e si ottiene

$$\frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} = E.$$

PROBLEMI ESPERTI

6 Problema esperto

a. Le due sfere conduttrici sono a contatto e quindi hanno lo stesso potenziale elettrico. Le sfere hanno però raggi diversi e quindi capacità diverse: poiché a parità di potenziale V la carica Q è direttamente proporzionale alla capacità C ($Q = CV$), le due sfere hanno cariche diverse.

b. Si tratta di risolvere il sistema formato dalle equazioni

$$\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1} = \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2} \text{ e } Q_1 + Q_2 = Q.$$

c. In prossimità di un conduttore carico, le linee di forza del campo elettrico sono perpendicolari alla superficie del conduttore.

d. La carica sulla sfera S_1 è

$$Q_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} Q = \frac{R_1}{R_1 + 3R_1} Q = \frac{1}{4}(2{,}8 \cdot 10^{-8}\,\text{C}) = 7{,}0 \cdot 10^{-9}\,\text{C}.$$

A distanza d dal centro della sfera, il potenziale è

$$V = k\frac{Q_1}{d} = \left(8{,}99 \cdot 10^9\,\text{N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2\right)\frac{7{,}0 \cdot 10^{-9}\,\text{C}}{0{,}65\,\text{m}} = 97\,\text{V}.$$

7 Problema esperto

a. È comodo scegliere come asse x la retta che contiene le due particelle, come origine la posizione del protone e come verso positivo delle ascisse quello che va dal protone all'elettrone, che così si trova nella posizione $x = D$. In questo modo l'ascissa del centro di massa del sistema risulta

$$x_{\text{cm}} = \frac{Mx_p + mx_e}{M + m} = \frac{m}{M + m} D = \frac{9{,}109 \cdot 10^{-31}\,\text{kg}}{9{,}109 \cdot 10^{-31}\,\text{kg} + 1{,}673 \cdot 10^{-27}\,\text{kg}} D = \frac{1}{1838} D.$$

Il centro di massa del sistema è circa 2000 volte più vicino al protone che all'elettrone; quindi l'approssimazione di considerare fermo il nucleo con l'elettrone che ruota attorno è ben giustificata.

b. In questo sistema la forza centripeta è data dalla forza di Coulomb, il cui modulo è

$$F_C = k_0 \frac{e^2}{D^2};$$

quindi, la relazione

$$m\frac{v^2}{D} = k_0 \frac{e^2}{D^2}$$

fornisce la condizione

$$v = e\sqrt{\frac{k_0}{mD}}.$$

c. L'energia cinetica dell'elettrone è

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\frac{e^2 k_0}{mD} = \frac{1}{2}k_0\frac{e^2}{D}$$

mentre l'energia potenziale del sistema elettrone-protone è

$$U = k_0\frac{(-e)e}{D} = -k_0\frac{e^2}{D};$$

così l'energia totale risulta

$$\mathcal{E} = U + K = -k_0\frac{e^2}{D} + \frac{1}{2}k_0\frac{e^2}{D} = -\frac{1}{2}k_0\frac{e^2}{D}.$$

d. Ora poniamo

$$-\frac{1}{2}k_0\frac{e^2}{D} = -2{,}18\cdot 10^{-18}\ \text{J}$$

e troviamo

$$D = k_0\frac{e^2}{2\left(2{,}18\cdot 10^{-18}\ \text{J}\right)} = \left(8{,}988\cdot 10^9\ \frac{\text{N}\cdot\text{m}^2}{\text{C}^2}\right)\frac{\left(1{,}60\cdot 10^{-19}\ \text{C}\right)^2}{4{,}36\cdot 10^{-18}\ \text{J}} = 5{,}28\cdot 10^{-11}\ \text{m}.$$

8 Problema esperto

a. Per il terzo principio della dinamica, mentre il mulinello attrae gli elettroni anche questi ultimi esercitano una forza attrattiva sul mulinello. Di conseguenza, durante la fase di avvicinamento degli elettroni il mulinello tende a spostarsi nel verso opposto a quello osservato sperimentalmente.
È analogo a ciò che accade nella situazione che riguarda le barche: mentre la persona tira la corda, le due barche si avvicinano tra loro ma entrambe si muovono.

b. Nel sistema formato dal mulinello e dagli elettroni agisce solo la forza elettrostatica, che è interna al sistema. Quindi la quantità di moto totale del sistema si conserva, e così pure la posizione del suo centro di massa. Perciò, nel momento in cui l'elettrone giunge a contatto con il mulinello e si unisce a esso, non è possibile che entrambi comincino a muoversi nel verso iniziale del moto dell'elettrone, perché se così fosse il centro di massa del sistema si sposterebbe.

c. Nella situazione iniziale le due sfere hanno energia cinetica nulla. Scegliamo come positivo il verso in cui si muove la sfera più massiva e indichiamo la sua velocità finale con V, mentre il simbolo v indica la velocità finale dell'elettrone. Osserviamo inoltre che, nel momento di massimo avvicinamento, la distanza fra l'elettrone e il centro della sfera vale R.
Dalla legge della conservazione dell'energia e da quella della conservazione della quantità di moto otteniamo il seguente sistema

$$\begin{cases} MV + mv = 0 \\ \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}mv^2 - k_0\frac{eQ}{R} = -k_0\frac{eQ}{D} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} nmV + mv = 0 \\ \frac{1}{2}nmV^2 + \frac{1}{2}mv^2 - zk_0\frac{e^2}{R} = -zk_0\frac{e^2}{D} \end{cases}.$$

Quindi, semplificando, il sistema precedente si riduce a

$$\begin{cases} v = -nV \\ \frac{1}{2}nmV^2 + \frac{1}{2}n^2mV^2 = zk_0e^2\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{D}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v = -nV \\ \frac{1}{2}nm(n+1)V^2 = zk_0e^2\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{D}\right) \end{cases}.$$

In definitiva, le soluzioni del sistema sono

$$\begin{cases} V = e\sqrt{\frac{2zk_0}{mn(n+1)}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{D}\right)} \\ v = -nV = -e\sqrt{\frac{2nzk_0}{m(n+1)}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{D}\right)} \end{cases}.$$

d. Nell'urto completamente anelastico, se indichiamo con u la velocità finale dei due oggetti, otteniamo

$$(M+m)u = MV + mv \quad \Rightarrow \quad u = \frac{MV + mv}{M+m} = \frac{nmV + m(-nV)}{nm+m} = \frac{0}{m(n+1)} = 0.$$

Per la conservazione della quantità di moto, i due oggetti in esame erano fermi all'inizio del fenomeno e si ritrovano in quiete anche alla sua conclusione.
La forza-peso può essere trascurata per il mulinello, in quanto esso poggia su un vincolo che gli impedisce di cadere. Gli elettroni, invece, sono soggetti all'intenso campo elettrico generato dalle punte e hanno, inoltre, una massa molto piccola; quindi subiscono una grande accelerazione e raggiungono alte velocità. In queste condizioni la loro traiettoria è a tutti gli effetti rettilinea.

9. Problema esperto

a. Per una sfera isolata si ha $v = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$. Sapendo che $C = \dfrac{Q}{V}$ e sostituendo l'espressione per il potenziale si ottiene
$C = 4\pi\varepsilon_0 R.$

b. Approssimando l'uomo con una sfera di raggio 1 m si ottiene per la capacità C = 111 pF, coerentemente con il valore dato.

c. Le capacità delle sfere A e B sono rispettivamente $C_A = 4\pi\varepsilon_0 R$ e $C_B = 4\pi\varepsilon_0 (2R) = 2C_A$. A parità di carica Q, le due sfere non hanno lo stesso potenziale, infatti

$$V_A = \frac{Q}{C_A}$$

e

$$V_B = \frac{Q}{C_B} = \frac{Q}{2C_A} = \frac{V_A}{2}.$$

d. Si registra un passaggio di cariche nel filo perché le due sfere non hanno lo stesso potenziale.

e. L'equilibrio è raggiunto quando $V_A = V_B$. Inoltre la carica totale finale è uguale alla carica totale iniziale, ovvero $2Q$. In formule

$$\begin{cases} V_A = V_B \\ Q_A + Q_B = 2Q \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{Q_A}{4\pi\varepsilon_0 C_A} = \dfrac{Q_B}{4\pi\varepsilon_0 C_B} \\ Q_A + Q_B = 2Q \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{Q_A}{4\pi\varepsilon_0 C_A} = \dfrac{Q_B}{4\pi\varepsilon_0 2C_A} \\ Q_A + Q_B = 2Q \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} Q_A = \dfrac{Q_B}{2} \\ Q_A + Q_B = 2Q \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_A = \dfrac{2}{3}Q \\ Q_B = \dfrac{4}{3}Q \end{cases}.$$

f. Data la misura delle armature, al fine di massimizzarne la capacità, bisogna porre le armature alla distanza minima possibile e scegliere un dielettrico con la massima constante dielettrica possibile.

10 Problema esperto

a. $Q = CV = \varepsilon_0 \dfrac{A}{d} V \;\rightarrow\; \sigma = \dfrac{Q}{A} = \varepsilon_0 \dfrac{V}{d} = \left(8{,}85 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{C/(V \cdot m)}\right) \dfrac{15\,\mathrm{V}}{1{,}4 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}} = 9{,}5\,\mathrm{nC/m^2}$

b. L'energia immagazzinata inizialmente nel campo del condensatore è $U = \dfrac{1}{2} Q_i V$. La differenza di potenziale viene mantenuta costante dal generatore di tensione, ma la carica sulle armature cambia perché cambia la capacità del condensatore. Infatti

$$C_i = \varepsilon_0 \frac{A}{d}$$

mentre

$$C_f = \varepsilon_0 \frac{A}{2d} = \frac{1}{2} C_i;$$

quindi

$$Q_f = C_f V = \frac{1}{2} C_i V = \frac{1}{2} Q_i.$$

Dunque

$$U_f = \frac{1}{2} Q_f V = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} Q_i V\right) = \frac{1}{2} U_i.$$

c. La forza esterna compie lavoro per allontanare le armature, che si attraggono perché hanno carica opposta. Questo lavoro fornisce l'energia necessaria per spingere la metà della carica iniziale 1/2 Q_i presente sulle armature in verso opposto alla f_{em} del generatore: parte di questa energia viene dissipata per effetto Joule, la rimanente viene restituita al generatore.

d. La distribuzione di carica sulle armature non può cambiare, in quanto il condensatore è disconnesso dal generatore. Inoltre la scatola non può acquistare una carica netta: ciò esclude il grafico A.
Il campo elettrico all'interno di un conduttore è nullo: ciò esclude il grafico C.
La risposta corretta è B: sulla faccia della scatola di fronte all'armatura positiva (negativa) viene indotta una densità superficiale di carica –*s* (+*s*); tali distribuzioni annullano il campo elettrico all'interno della scatola.