QUESITI

1 Quesito

Un'onda elettromagnetica piana è *polarizzata linearmente* quando il suo campo elettrico $\vec{E}$ oscilla restando sempre parallelo a se stesso.
La legge di Malus esprime l'irradiamento della luce in funzione dell'angolo tra la direzione di polarizzazione della luce incidente e l'asse di trasmissione di un filtro polarizzatore:

$$E_R = E_R^{(0)} \cos^2 \alpha$$

con:
E_R: irradiamento della luce trasmessa;
$E_R^{(0)}$: irradiamento della luce incidente;
α: angolo tra direzione di polarizzazione e asse di trasmissione.
Per dimostrarla, scomponiamo il campo elettrico $\vec{E}$ della luce incidente nei due vettori componenti $\vec{E}_{\parallel}$, parallelo all'asse di trasmissione, ed $\vec{E}_{\perp}$, perpendicolare.
La componente polarizzata linearmente nella direzione perpendicolare $\vec{E}_{\perp}$ viene assorbita dal polarizzatore.
Se l'ampiezza di oscillazione del campo $\vec{E}$ è E_0, quella del vettore componente $\vec{E}_{\parallel}$ è

$$E_{\parallel 0} = E_0 \cos\alpha.$$

Ricordiamo la formula: $E_R = \frac{1}{2} c\varepsilon_0 E_0^2$.
L'irradiamento della luce che emerge dal filtro, polarizzata lungo l'asse di trasmissione, è

$$E_R = \frac{1}{2} c\varepsilon_0 E^2{}_{\parallel 0} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \left(E_0 \cos\alpha\right)^2 = \left(\frac{1}{2} c\varepsilon_0 E_0^2\right)\cos^2\alpha.$$

Il fattore tra parentesi è l'irradiamento $E_R^{(0)}$ della luce incidente: la formula è dimostrata.

2 Quesito

Il passaggio attraverso il polarizzatore non altera la lunghezza d'onda né la frequenza della luce incidente.
Pertanto

$$l = \frac{c}{f} = \frac{3{,}0 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{5{,}5 \cdot 10^{14} \text{ Hz}} = 540 \text{ nm}.$$

3 Quesito

$P = IA = (95 \text{ W/m}^2)\,(1{,}8 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2) = 0{,}17 \text{ W}$
Per la legge di Malus
$I = I_0 \cos^2 28° = (95 \text{ W/m}^2) \cos^2 28° = 74 \text{ W/m}^2$.

4 Quesito **Con le derivate**

Scegliamo come semiasse positivo delle x una semiretta perpendicolare alle armature del condensatore e diretta dall'armatura di riferimento verso l'altra armatura. All'istante $t = 0$ s il campo elettrico all'interno del condensatore ha questo stesso verso, per cui la componente x di tale campo elettrico può essere scritta come

$$E_x(t) = \frac{V(t)}{d} = \frac{1}{d}\frac{Q}{C}\cos\omega t = \frac{Q}{\cancel{d}}\frac{\cancel{d}}{\varepsilon_0 S}\cos\omega t = \frac{Q}{\varepsilon_0 S}\cos\omega t.$$

Secondo quanto scritto nel testo, il vettore $\vec{S}$ che rappresenta la superficie interna al condensatore è rivolto come le x negative. Quindi si trova

$$\Phi_S(\vec{E}) = \vec{E}\cdot\vec{S} = -SE_x(t) = -S\frac{Q}{\varepsilon_0 S}\cos\omega t = -\frac{Q}{\varepsilon_0}\cos\omega t.$$

Si trova così, per la corrente di spostamento $i_S(t)$, l'espressione:

$$i_S(t) = \varepsilon_0\frac{\mathrm{d}\Phi(\vec{E})}{\mathrm{d}t} = \varepsilon_0\frac{\mathrm{d}\left[-(Q/\varepsilon_0)\cos\omega t\right]}{\mathrm{d}t} = -\cancel{\varepsilon_0}\frac{Q}{\cancel{\varepsilon_0}}\frac{\mathrm{d}(\cos\omega t)}{\mathrm{d}t} = -Q\omega(-\mathrm{sen}\,\omega t) = \omega Q\,\mathrm{sen}\,\omega t.$$

Come si vede, la formula per $i_S(t)$ è identica all'espressione per $i(t)$ fornita nel testo.

PROBLEMI

5 Problema **Con le derivate**

a. Per la formula di Faraday-Neumann, il modulo della forza elettromotrice indotta è

$$|f_{em}| = \frac{\mathrm{d}\Phi(\vec{B})}{\mathrm{d}t},$$

dove $\Phi(\vec{B})$ è calcolato attraverso una superficie piana di area S che ha per contorno la spira circolare. Si ottiene così

$$|f_{em}| = \frac{\mathrm{d}\Phi(\vec{B})}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}[SB(t)]}{\mathrm{d}t} = \pi r^2\frac{\mathrm{d}(kt^\alpha)}{\mathrm{d}t} = \pi k\alpha r^2 t^{\alpha-1}.$$

Perché $|f_{em}|$ non dipenda da t occorre porre $\alpha = 1$.

b. La richiesta del problema equivale a scrivere (con $\alpha = 1$):

$$\pi k r^2 = f_{em,1}$$

da cui

$$k = \frac{f_{em,1}}{\pi r^2} = \frac{3{,}78\cdot10^{-4}\ \mathrm{V}}{\pi\cdot(0{,}128\ \mathrm{m})^2} = 7{,}34\cdot10^{-3}\ \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}^2} =$$

$$= 7{,}34\cdot10^{-3}\ \frac{1}{\mathrm{m}^{\cancel{2}}}\cdot\frac{\mathrm{N}\cdot\cancel{\mathrm{m}}}{\mathrm{A}\cdot\mathrm{s}} = 7{,}34\cdot10^{-3}\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{A}\cdot\mathrm{m}}\cdot\frac{1}{\mathrm{s}} = 7{,}34\cdot10^{-3}\ \frac{\mathrm{T}}{\mathrm{s}}.$$

Indicando con R la resistenza della spira, l'intensità della corrente indotta nella spira è

$$i=\frac{f_{em,1}}{R}=\frac{f_{em,1}}{2\cancel{\pi}r\rho}\frac{\cancel{\pi}d^2}{4}=\frac{f_{em,1}d^2}{8r\rho}=\frac{\left(3{,}78\cdot10^{-4}\,\mathrm{V}\right)\times\left(2{,}6\cdot10^{-4}\,\mathrm{m}\right)^2}{8\cdot\left(0{,}128\,\mathrm{m}\right)\left(1{,}7\cdot10^{-8}\,\Omega\cdot\mathrm{m}\right)}=1{,}5\cdot10^{-3}\,\mathrm{A}.$$

c. Dal testo, il vettore campo elettrico indotto $\vec{E}$ è in ogni punto tangente alla spira. Inoltre, per motivi di simmetria il suo modulo è uniforme lungo la spira stessa. Quindi conviene calcolare la circuitazione di $\vec{E}$ lungo una linea chiusa orientata L sovrapposta al circuito e orientata in modo da seguire il verso opposto a quello di $\vec{E}$. In questo modo, in analogia con la dimostrazione del teorema di Ampère, la relazione

$$\Gamma_L(\vec{E})=-\frac{\mathrm{d}\Phi\left(\vec{B}\right)}{\mathrm{d}t}$$

diventa

$$2\cancel{\pi}\,\cancel{r}\,E\left(t\right)=\cancel{\pi}\,k\alpha r^{\cancel{2}}\,t^{\alpha-1},$$

da cui

$$E(t)=\frac{k\alpha r t^{\alpha-1}}{2}.$$

Se si pone α = 1/2, il modulo del campo elettrico risulta proporzionale a $1/\sqrt{t}$.

d. Nelle condizioni descritte dal testo si ottiene l'equazione

$$E\left(t\right)=\frac{kr}{4\sqrt{t}},$$

da cui si ottiene

$$k=\frac{4E_1\sqrt{t}}{r}=\frac{4\times\left(4{,}70\cdot10^{-4}\,\mathrm{V/m}\right)\cdot\sqrt{4{,}00\,\mathrm{s}}}{0{,}128\,\mathrm{m}}=2{,}94\cdot10^{-2}\,\frac{\mathrm{V}\cdot\sqrt{\mathrm{s}}}{\mathrm{m}^2}=$$
$$=2{,}94\cdot10^{-2}\,\frac{\mathrm{T}}{\mathrm{s}}\cdot\sqrt{\mathrm{s}}=2{,}94\cdot10^{-2}\,\frac{\mathrm{T}}{\sqrt{\mathrm{s}}}.$$

Nel penultimo dei precedenti passaggi si è utilizzata la determinazione di unità di misura effettuata nel punto **b.**

6 Problema

a. La potenza minima è data da $P_{\min}=S_{\min}\cdot4\pi R^2$.
Per la singola antenna, il raggio R è dato dal raggio della città e la potenza minima vale

$$P_{\min}=5\cdot10^{-3}\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}\cdot4\pi\left(3{,}6\cdot10^3\,\mathrm{m}\right)^2=810\,\mathrm{kW}.$$

Per il sistema composto da 7 antenne, bisogna prima calcolare il raggio delle regioni circolari in cui la città viene suddivisa. Dalla figura B, deduciamo che $R=2a+r$, dove a è l'apotema dell'esagono inscritto nella circonferenza e r il raggio della circonferenza. In un esagono regolare, l'apotema è dato da $a = \frac{\sqrt{3}}{2} l$ e il lato l è lungo quanto il raggio r, da cui

$$R = 2\frac{\sqrt{3}}{2}r + r \quad \Rightarrow \quad r = \frac{R}{\sqrt{3}+1} = 1{,}3 \cdot 10^3 \text{ m.}$$

La potenza minima per ciascuna delle antenne piccole è

$$P'_{\min} = S_{\min} \cdot 4\pi r^2 = 106 \text{ kW.}$$

b. La potenza totale consumata dalle 7 antenne è $P_{tot} = 7\,P'_{\min} = 742 \text{ kW},$ quindi l'antenna grossa consuma nel complesso più energia.

c. L'intensità efficace del campo elettrico a una distanza d_G è data da $E_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{S}{c\varepsilon_0}}$, con $S = \frac{P_{\min}}{4\pi d_G^2}$, da cui

$$E_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{P_{\min}}{4\pi c \varepsilon_0 d_G^2}} = 62 \text{ V/m.}$$

d. Denotando con d la distanza alla quale si devono trovare gli edifici più vicini, perché il campo elettrico efficace sia quello calcolato al punto precedente, abbiamo

$$d = \sqrt{\frac{P'_{\min}}{4\pi c \varepsilon_0 E_{\text{eff}}^2}} = \sqrt{\frac{P'_{\min}}{P_{\min}} d_G^2} = 29 \text{ m.}$$

e. L'intensità del campo magnetico dell'onda è

$$B = \frac{E_{\text{eff}}}{c} = \frac{62 \text{ V/m}}{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}} = 2{,}1 \cdot 10^{-7} \text{ T} = 210 \text{ nT.}$$

7 Problema

a. $i_{\text{s}} = I = Ck\, i_{\text{f}} = \frac{V}{R} = \frac{kt}{R} \quad \Rightarrow \quad Ck = \frac{kt}{R} \quad \Rightarrow \quad t = RC = 0{,}78\ \mu\text{s}$

b. È generato dalla corrente di spostamento.

c. Sono circonferenze concentriche con asse coincidente con quello delle armature.

d. $B(r) \cdot 2\pi r = \mu_0 \varepsilon_0 \pi r^2 \frac{\Delta \mathcal{E}}{\Delta t} \quad \Rightarrow \quad B(r) = \frac{1}{2}\mu_0 \varepsilon_0 r^2 \frac{\Delta \mathcal{E}}{\Delta t}$

e. Se il tasso di variazione $\frac{\Delta \mathcal{E}}{\Delta t} = 0{,}2\ \text{V/s}$ del campo $\mathcal{E}$ è costante, allora il campo B è costante, mentre nel caso in cui $\frac{\Delta \mathcal{E}}{\Delta t} = \left(0{,}2\ \text{V/s}^2\right)t^2$ il tasso divariazione e quindi B crescono nel tempo.

PROBLEMI ESPERTI

8 Problema esperto

a. L'indice di rifrazione dell'aria vale $n = \sqrt{\varepsilon_r \mu_r}$. Dai valori statici forniti dalla tabella vediamo che questo valore è molto simile a 1. Tenendo conto delle cifre significative con cui sono forniti i dati e, per completezza, del fatto che il valore di ε_r tende a diminuire all'aumentare della frequenza, non si commette alcun errore nel considerare l'indice di rifrazione dell'aria uguale a quello del vuoto, e quindi il modulo della velocità delle onde elettromagnetiche uguale a c.
Dalla formula $c = \lambda f$, per i valori di frequenza interessati si ha $1{,}00 \cdot 10^{-3}\ \text{m} \leq \lambda < 3{,}00 \cdot 10^{3}\ \text{m}$.
Si tratta di onde radio e microonde, fino al limite con l'infrarosso.

b. In analogia con il valore efficace della forza elettromotrice alternata o della corrente alternata, il valore efficace E_{eff} del campo elettrico è pari all'ampiezza E_0 del campo, divisa per $\sqrt{2}$:

$$E_{\text{eff}} = \frac{E_0}{\sqrt{2}}.$$

Quindi, per il valore limite fornito dal testo, l'ampiezza massima accettabile del campo elettrico risulta

$$E_0 = \sqrt{2}\, E_{\text{eff}} = \sqrt{2} \cdot \left(6{,}0 \frac{\text{V}}{\text{m}}\right) = 8{,}5 \frac{\text{V}}{\text{m}}.$$

La corrispondente ampiezza massima del campo magnetico è

$$B_0 = \frac{E_0}{c} = \frac{8{,}5\ \text{V/m}}{3{,}00 \cdot 10^{8}\ \text{m/s}} = 2{,}8 \cdot 10^{-8}\ \text{T}.$$

c. L'irradiamento che corrisponde al valore di attenzione del campo elettrico è uguale a

$$E_R = \frac{1}{2} c \varepsilon_0 E_0^2 = \frac{1}{2}\left(3{,}00 \cdot 10^{8} \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)\left(8{,}854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{F}}{\text{m}}\right)\left(8{,}5 \frac{\text{V}}{\text{m}}\right)^2 = 9{,}6 \cdot 10^{-2} \frac{\text{W}}{\text{m}^2}.$$

Il valore trovato è minore di quello solare di un fattore con un ordine di grandezza pari a 10^4.
La pressione di radiazione corrispondente all'irradiamento trovato è

$$p_r = \frac{E_R}{c} = \frac{9{,}6 \cdot 10^{-2}\ \text{W/m}^2}{3{,}00 \cdot 10^{8}\ \text{m/s}} = 3{,}2 \cdot 10^{-10}\ \text{Pa} = 32\ \text{nPa}.$$

d. Schematizzando l'antenna come puntiforme e facendo l'ipotesi che irraggi in modo isotropo, troviamo che la potenza P che essa emette è

$$P = 4\pi R^2 E_R = 4\pi \cdot (22\ \text{m})^2 \cdot \left(9{,}6 \cdot 10^{-2}\ \frac{\text{W}}{\text{m}^2}\right) = 5{,}8 \cdot 10^2\ \text{W}.$$

A 16 m di distanza l'irradiamento E'_R vale

$$E'_R = \frac{P}{4\pi r^2} = \frac{5{,}8 \cdot 10^2\ \text{W}}{4\pi \cdot (16\ \text{m})^2} = 0{,}18\frac{\text{W}}{\text{m}^2},$$

a cui corrisponde un'ampiezza di campo elettrico E'_0 che si calcola come

$$E'_0 = \sqrt{\frac{2E'_R}{c\varepsilon_0}} = \sqrt{\frac{2 \cdot (0{,}18\ \text{W/m}^2)}{(3{,}00 \cdot 10^8\ \text{m/s})(8{,}854 \cdot 10^{-12}\ \text{F/m})}} = 12\frac{\text{V}}{\text{m}}.$$

9 Problema esperto

a. La potenza irraggiata dal Sole è data da $P = \overline{S}\,4\pi d^2$, dove d è la distanza Terra-Sole. La luce del Sole impiega 8′ 20″ = 500 s per raggiungere la Terra, quindi $d = c\,t = 1{,}5 \cdot 10^{11}$ m, da cui

$$P = 1{,}36 \cdot 10^3 \cdot 4\pi (1{,}5 \cdot 10^{11})^2\ \text{W} = 3{,}8 \cdot 10^{26}\ \text{W}.$$

b. La figura A mostra un'immagine Doppler della fotosfera solare lungo la direzione di vista. I punti con velocità negativa e con colore più scuro sono punti in cui la fotosfera si avvicina alla Terra con velocità compresa tra 0 e 2500 m/s. I punti con velocità positiva e con colore più chiaro sono quelli che si allontanano dalla Terra.

c. La relazione fra frequenza osservata e frequenza emessa nel caso della massima velocità è

$f_\text{o} = f_\text{s}\left(1 + \dfrac{v_\text{max}}{c}\right)$, dove il segno positivo indica che la sorgente e l'osservatore si stanno avvicinando. Dalla figura A vediamo che $v_\text{max} = 2500$ m/s, quindi

$$\frac{f_\text{o}}{f_\text{s}} = 1 + \frac{2500}{3 \cdot 10^8} = 1 + 8 \cdot 10^{-6}.$$

d. Un osservatore non potrebbe vedere il fenomeno, in quanto l'emissione è nell'ultravioletto: 171 A ≡ 17,1 nm.

e. La luce del Sole non ha una direzione di polarizzazione ben definita. Le onde elettromagnetiche sono emesse dagli atomi che compongono il sole e ognuno di essi emette con la proprio direzione di polarizzazione, che cambia in maniera causale per via degli urti a livello atomico.

10 Problema esperto

a. La luce solare deve incidere sulla superficie del mare con l'angolo di Brewster, in modo che la luce riflessa sia tutta polarizzata linearmente in direzione orizzontale: Giulia deve orientare gli occhiali in modo che l'asse di trasmissione sia verticale.

b. $\alpha = 90° - \tan^{-1}\left(\dfrac{n_{ac}}{n_{ar}}\right) = 37°$

c. L'energia media che attraversa nell'unità di tempo $1\,\text{m}^2$ di superficie nell'alta atmosfera terrestre è stata emessa da una regione di superficie solare con area $1\,\text{m}^2/200^2$: la potenza media di emissione è circa

$$\frac{1{,}4\ \text{kW/m}^2}{2{,}5\cdot 10^{-5}} = 5{,}6\cdot 10^7\ \text{W/m}^2.$$

d. L'intensità decresce come $1/r^2$, per cui E e B decrescono come $1/r$.

e. Molto meno intenso.

f. $N = \dfrac{(2{,}7\ \text{tep})(4{,}2\cdot 10^{10}\ \text{J})}{\left[(356\ \text{d})(86400\ \text{s/d})(1{,}4\ \text{kW/m}^2\cdot 0{,}01)\right]} = 257\ \text{m}^2$