QUESITI

1 Quesito

Le dimensioni dell'oggetto perpendicolari alla direzione del moto rimangono inalterate.
La dimostrazione può procedere per assurdo, con l'esempio del treno nella galleria: se le dimensioni perpendicolari al moto cambiassero, il treno passerebbe nella galleria nel sistema di riferimento della galleria, mentre nel sistema di riferimento del treno rimarrebbe incastrato.
Non è possibile che l'incidente avvenga o non avvenga a seconda del sistema di riferimento: le dimensioni trasversali devono essere invarianti.

2 Quesito

La velocità della luce è uguale a c in tutti i sistemi di riferimento inerziali. Quindi la velocità di propagazione di un fascio di luce ($v = c$) emesso in B nello stesso verso di w, misurata da A, deve essere $v' = c$.
Poiché il fattore g tende a infinito quando v tende a c:
– la B è sbagliata perché $v' \to 0$;
– la C è sbagliata perché $v' \to \infty$.
La formula corretta è la A.

3 Quesito

Dati due eventi E_1 ed E_2, l'**intervallo invariante**, indicato con $\Delta\sigma$, dipende soltanto dagli eventi stessi e non dal particolare sistema di riferimento usato per descriverli.
Se, in un dato sistema di riferimento, E_1 ed E_2 sono separati dagli incrementi Δx, Δy, Δz e Δt delle coordinate spaziotemporali, si ha
$(\Delta\sigma)^2 = (c\,\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2 = (c\,\Delta t)^2 - (\Delta s)^2$,
dove $(\Delta s)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2$ è il quadrato della distanza tridimensionale che separa i punti P_1 e P_2 in cui si verificano gli eventi E_1 ed E_2.
Se $(\Delta\sigma)^2 > 0$, si dice che $\Delta\sigma$ è un **intervallo di tipo tempo** e si ha
$c\,\Delta t > \Delta s$,
cioè la distanza spaziale Δs tra i due eventi E_1 ed E_2 è minore della distanza $c\,\Delta t$ percorsa dalla luce nell'intervallo di tempo Δt che li separa. In questo caso gli eventi E_1 ed E_2 sono detti *causalmente connessi*, perché un segnale emesso in corrispondenza di E_1 può propagarsi, con velocità inferiore a c, fino a influenzare E_2.
Se $(\Delta\sigma)^2 < 0$, si dice che $\Delta\sigma$ è un **intervallo di tipo spazio**. In questo caso un segnale emesso in corrispondenza dell'evento E_1 non può influenzare l'evento E_2 e i due eventi sono *causalmente non connessi* in tutti i sistemi di riferimento.
Se vale $(\Delta\sigma)^2 = 0$, si dice che $\Delta\sigma$ è un **intervallo di tipo luce**. In questo caso:
$c\,\Delta t = \Delta s$.
Ciò significa che solo un segnale luminoso, partendo in corrispondenza dell'evento E_1 e viaggiando nel vuoto alla velocità $c = \Delta s / \Delta t$, può influenzare l'evento E_2.

4 Quesito

L'intervallo di tempo Δt richiesto vale

$$\Delta t = \frac{L}{v} = \frac{L}{\beta c} = \frac{42{,}5\,\text{m}}{0{,}964 \cdot (3{,}00 \cdot 10^8\,\text{m/s}} = 1{,}47 \cdot 10^{-7}\,\text{s}.$$

La durata dello stesso fenomeno nel sistema solidale con il protone è il tempo proprio $\Delta\tau$ del fenomeno, per cui calcoliamo il coefficiente di dilatazione che corrisponde alla velocità del protone e troviamo

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-0{,}964^2}} = 3{,}76.$$

Allora il valore di $\Delta\tau$ risulta:

$$\Delta\tau = \frac{\Delta t}{\gamma} = \frac{1{,}47 \cdot 10^{-7}\,\text{s}}{3{,}76} = 3{,}91 \cdot 10^{-8}\,\text{s}.$$

La distanza L è la lunghezza propria del tragitto del protone. Quindi la lunghezza Δs dello stesso spostamento (compiuto dal tubo che si "muove all'indietro" rispetto alla particella) nel sistema di riferimento del protone vale

$$\Delta s = \frac{L}{\gamma} = \frac{42{,}5\,\text{m}}{3{,}76} = 11{,}3\,\text{m}.$$

5 Quesito

No: la durata del carburante è espressa nel tempo proprio dell'astronave, per cui la distanza di 4,25 a.l. è quella misurata nello stesso riferimento e non è uguale a d_{TPC}, che è invece misurata nel sistema di riferimento della Terra.

$$d'_{\text{TPC}} = \frac{d_{\text{TPC}}}{\gamma} = 2{,}30\,\text{a.l.}$$

$$\Delta t_0 = \frac{d_{\text{TPC}}/\gamma}{v} = 2{,}71\,\text{anni}$$

$$f_{\text{T}} = \sqrt{\frac{c-v}{c+v}}\, f_{\text{A}} = 31{,}3\,\text{MHz}$$

6 Quesito

L'intervallo invariante che separa i due eventi è

$$\Delta\sigma = \sqrt{(c\Delta t_1)^2 - \left(\Delta s_1\right)^2} = \sqrt{\left[\left(3{,}00 \cdot 10^8\,\text{m/s}\right)\times\left(1{,}62 \cdot 10^{-9}\,\text{s}\right)\right]^2 - \left(0{,}410\,\text{m}\right)^2} = 0{,}261\,\text{m}.$$

Passando al sistema S_2 abbiamo:

$$\left(c\Delta t_2\right)^2 - \left(\Delta s_2\right)^2 = \Delta\sigma^2 \quad \Rightarrow \quad \Delta t_2 = \frac{\sqrt{\Delta\sigma^2 + \left(\Delta s_2\right)^2}}{c} = \frac{\sqrt{(0{,}261\,\text{m})^2 + (0{,}175\,\text{m})^2}}{3{,}00 \cdot 10^8\,\text{m/s}} = 1{,}05 \cdot 10^{-9}\,\text{s}.$$

Il tempo proprio del fenomeno che separa i due eventi è

$$\Delta\tau = \frac{\Delta\sigma}{c} = \frac{0{,}261\ \text{m}}{3{,}00 \cdot 10^{8}\ \text{m/s}} = 8{,}70 \cdot 10^{-10}\ \text{s}.$$

PROBLEMI

7 Problema

a. Visto che l'ostacolo si avvicina all'antenna trasmittente, l'effetto Doppler relativistico stabilisce che vale la relazione ($\beta = v/c$)

$$f_1 = f\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}.$$

b. Ancora una volta si ha avvicinamento tra l'oggetto che trasmette e quello che riceve; quindi troviamo

$$f_2 = f_1\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} = f\left(\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}\right)^2 = f\,\frac{1+\beta}{1-\beta} = f\,\frac{c+v}{c-v}.$$

Lo spostamento Doppler che ne risulta è

$$\Delta f = f_2 - f = f\left(\frac{c+v}{c-v} - 1\right) = f\,\frac{2v}{c-v}.$$

c. Per tutti gli ostacoli concepibili la velocità v è molto minore di c ($v \ll c$); quindi al denominatore dell'espressione precedente si può porre $c - v \approx c$; in questo modo si trova la relazione

$$\Delta f = \frac{2fv}{c}.$$

Da essa si ricava

$$v = \frac{c\,\Delta f}{2f} = \frac{\left(3{,}00 \cdot 10^{8}\ \text{m/s}\right) \times \left(4{,}52 \cdot 10^{3}\ \text{Hz}\right)}{2 \cdot \left(2{,}80 \cdot 10^{9}\ \text{Hz}\right)} = 242\,\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

d. Una parte su un milione equivale a 1×10^{-6}. Quindi abbiamo

$$\frac{\Delta f}{f} = \frac{2v_{\text{min}}}{c} = 6 \cdot 10^{-7}.$$

Dalla seconda delle precedenti uguaglianze possiamo allora calcolare

$$v_{\text{min}} = \frac{\left(6 \cdot 10^{-7}\right)c}{2} = \frac{\left(6 \cdot 10^{-7}\right) \cdot \left(3{,}00 \cdot 10^{8}\ \text{m/s}\right)}{2} = 9 \cdot 10\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \sim 10^{2}\,\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

8 Problema

a. Il tempo misurato sulla Terra è dato da

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{2{,}0\ \text{h}}{1-0{,}2^2} = 2{,}1\ \text{h}.$$

b. L'intervallo di tempo misurato sulla Terra differisce da quello misurato sull'astronave di 5,00 s, ovvero

$$5{,}00\ \text{s} = \Delta t_{\text{Terra}} - \Delta t_{\text{astronave}}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}-1\right) \quad \Rightarrow \quad \Delta t_{\text{astronave}} = \frac{5{,}00\ \text{s}}{\left(\frac{1}{\sqrt{1-0{,}2^2}}-1\right)} = 247\ \text{s}.$$

c. Il segnale si propaga alla velocità della luce, quindi impiega $\Delta t = \frac{\Delta x}{c} = 40\ \text{s}$ per raggiungere la Terra.

d. La lunghezza misurata da Marte è legata alla lunghezza misurata dagli astronauti dalla legge di contrazione delle lunghezza, ovvero

$$\Delta l = \Delta l_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = 85\ \text{m}\ \sqrt{1-0{,}4^2} = 78\ \text{m}.$$

e. $\Delta l_0 = \dfrac{\Delta l}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = 2{,}7\cdot 10^3\ \text{m}$

9 Problema

a. Entrambe misurano

$$l = \frac{l_0}{\gamma} = \sqrt{\frac{1-v^2}{c^2 l_0}} = 77\ \text{m}.$$

b. Orologio in B:

$$t_B = \frac{l_0}{v} = 6{,}4\cdot 10^{-7}\ \text{s},$$

perché B' si sposta di un tratto uguale a l_0 con velocità relativa v.

c. Orologio in A:

$$t_A = \frac{l_0/\gamma}{v} = 5{,}7\cdot 10^{-7}\ \text{s},$$

perché A' si sposta di un tratto alla lunghezza l_0/γ dell'astronave in moto vista da A (e dunque contratta) con velocità relativa v.

d. Luce: c; elettroni: $v = \dfrac{v+v'}{1+\dfrac{vv'}{c^2}} = 0{,}56c$

e. $E = \gamma mc^2 = 9{,}2 \cdot 10^{-14}$ J

10 Problema

a. Rispetto al neutrone, il sistema di riferimento del laboratorio si muove con velocità $\vec{v} = -v_n\,\hat{x}$.
Dalla legge di composizione delle velocità troviamo, allora

$$v_\mu = \frac{v'_\mu - (-v_n)}{1-\dfrac{v'_\mu(-v_n)}{c^2}} = \frac{v'_\mu + v_n}{1+\dfrac{v'_\mu v_n}{c^2}} = \frac{(2{,}40+1{,}60)\cdot 10^8\ \text{m/s}}{1+\dfrac{2{,}40}{3{,}00}\cdot\dfrac{1{,}60}{3{,}00}} = 2{,}80 \cdot 10^8\ \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Il coefficiente di dilatazione associato a questa velocità è

$$\gamma_\mu = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{2{,}80}{3{,}00}\right)^2}} = 2{,}79,$$

per cui l'energia cinetica del muone nel riferimento del laboratorio è

$$K_{r\mu} = m_0 c^2(\gamma - 1) = \left(1{,}88 \cdot 10^{-28}\ \text{kg}\right)\left(9{,}00 \cdot 10^{16}\ \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}\right)\cdot 1{,}79 = 3{,}03 \cdot 10^{-11}\ \text{J}.$$

b. Nel sistema di riferimento del muone, il neutrone si muove con velocità $\vec{v}_1 = -v_\mu \hat{x}$. Il coefficiente di dilatazione relativo a questa velocità è

$$\gamma_n = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{1{,}60}{3{,}00}\right)^2}} = 1{,}18,$$

per cui la quantità di moto del neutrone risulta

$$\vec{p}_n = -M_0 \gamma_n v_\mu \hat{x} = -\left(1{,}67 \cdot 10^{-27}\ \text{kg}\right)\cdot 1{,}18 \cdot \left(1{,}60 \cdot 10^8\ \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)\hat{x} = -\left(3{,}15 \cdot 10^{-19}\ \text{kg}\cdot\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)\hat{x}.$$

c. Il sistema di riferimento del neutrone si muove con velocità $\vec{v}_n = v_n\,\hat{x}$ rispetto al sistema di riferimento del laboratorio; quindi, nel riferimento del neutrone la velocità del fotone risulta

$$v_\gamma = \frac{c - v_n}{1-\dfrac{v_n \cancel{c}}{c^{\cancel{2}}}} = \frac{c - v_n}{1-\dfrac{v_n}{c}} = \frac{c}{c - v_n}(c - v_n) = c.$$

Si conferma, quindi, che la velocità della luce nel vuoto è la stessa in tutti i sistemi di riferimento inerziali.

d. Se si pongono direttamente $u = c$ e $v = c$ nella formula

$$u' = \frac{u-v}{1-\frac{uv}{c^2}},$$

sia il numeratore che il denominatore risultano uguali a zero. Conviene allora lasciare indicata la velocità v e calcolare il limite della formula per $v \to c$, ottenendo una formula indeterminata [0/0] che si risolve (in modo analogo al calcolo precedente) come:

$$v'_\gamma = \lim_{v\to c}\frac{c-v}{1-\frac{v}{c}} = \lim_{v\to c}\frac{c}{c-v}(c-v) = \lim_{v\to c} c = c.$$

Non esiste, quindi, un sistema di riferimento inerziale in cui il fotone, nel vuoto, ha velocità minore di c.

PROBLEMI ESPERTI

11 Problema esperto Con i limiti

a. Per il passaggio da S a S' chiamiamo β_1 la quantità

$$\beta_1 = \frac{v_1}{c} = \frac{3}{5}$$

e indichiamo con γ_1 il parametro

$$\gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{1-\beta_1^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-(3/5)^2}} = \frac{5}{4}.$$

Le corrispondenti grandezze nel passaggio tra S' e S'' sono

$$\beta_2 = \frac{v_2}{c} = \frac{5}{13} \quad \text{e} \quad \gamma_2 = \frac{13}{12}.$$

Quindi le trasformazioni di Lorentz richieste sono

$$\begin{cases} t' = \frac{5}{4}\left(t - \frac{3}{5}\frac{x}{c}\right) \\ x' = \frac{5}{4}\left(x - \frac{3}{5}ct\right) \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} t'' = \frac{13}{12}\left(t' - \frac{5}{13}\frac{x'}{c}\right) \\ x'' = \frac{13}{12}\left(x' - \frac{5}{13}ct'\right) \end{cases}.$$

b. Sostituendo le prime due tra le formule precedenti nelle seconde due si ottiene, per la coordinata t'':

$$t'' = \frac{13}{12}\left[\frac{5}{4}\left(t - \frac{3}{5}\frac{x}{c}\right) - \frac{5}{13}\times\frac{5}{4}\frac{1}{c}\left(x - \frac{3}{5}ct\right)\right] = \frac{13}{12}\left(\frac{20}{13}t - \frac{16}{13}\frac{x}{c}\right) =$$

$$= \frac{13}{12}\times\frac{20}{13}\left(t - \frac{13}{20}\times\frac{16}{13}\frac{x}{c}\right) = \frac{5}{3}\left(t - \frac{4}{5}\frac{x}{c}\right).$$

In modo analogo, per la coordinata x'' si trova

$$x'' = \frac{13}{12}\left(x' - \frac{5}{13}ct'\right) = \frac{13}{12}\left[\frac{5}{4}\left(x - \frac{3}{5}ct\right) - \frac{5}{13}c\frac{5}{4}\left(t - \frac{3}{5}\frac{x}{c}\right)\right] = \frac{5}{3}\left(x - \frac{4}{5}ct\right).$$

c. Confrontando le due precedenti formule

$$t'' = \frac{5}{3}\left(t - \frac{4}{5}\frac{x}{c}\right) \quad \text{e} \quad x'' = \frac{5}{3}\left(x - \frac{4}{5}ct\right)$$

con le espressioni generali

$$t'' = \gamma\left(t - \beta\frac{x}{c}\right) \quad \text{e} \quad x'' = \gamma\left(x - \beta ct\right)$$

vediamo che possiamo operare le identificazioni

$$\beta = \frac{4}{5} \quad \text{e} \quad \gamma = \frac{5}{3}.$$

Per controllare se questi due valori sono coerenti tra loro, calcoliamo il coefficiente di dilatazione che corrisponde a $\beta = 4/5$, cioè

$$\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\left(4/5\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-16/25}} = \frac{5}{3}.$$

Notiamo che il risultato ottenuto è identico al valore di γ identificato prima. Quindi i due parametri che si ottengono dalle trasformazioni di Lorentz sono coerenti tra loro e possiamo affermare che la velocità con cui il sistema di riferimento S'' si muove rispetto a S è

$$v = \frac{4}{5}c.$$

d. Dalle trasformazioni di Galileo si ottiene

$$v_{\text{TOT}} = v_1 + v_2 = \frac{3}{5}c + \frac{5}{13}c = \frac{64}{65}c.$$

Quindi i due valori ottenuti sono diversi tra loro: la composizione relativistica delle velocità fornisce un risultato diverso dalla composizione vettoriale della meccanica classica.
La quantità richiesta è

$$\frac{v_{\text{TOT}}}{v} - 1 = \frac{64}{65} \times \frac{5}{4} - 1 = \frac{16}{13} - 1 = \frac{3}{13} = \frac{3}{5} \times \frac{5}{13} = \beta_1\beta_2.$$

12 Problema esperto

a. La velocità a cui si muove la sonda 0 è una velocità relativistica. Per calcolare la velocità della sonda 1 consideriamo la legge di addizione delle velocità. La sonda 1 si muove rispetto alla sonda 0 di velocità v_0 , ovvero la stessa velocità con cui la sonda 0 si muove rispetto alla Terra. La velocità della sonda 1 rispetto alla Terra è quindi data da

$$v_1 = \frac{v_0 + v_0}{1 + \frac{v_0^2}{c}} = 0{,}02c = 6000 \text{ km/s}.$$

La sonda 2 si muove rispetto alla sonda 1 di velocità v_0, quindi

$$v_1 = \frac{v_1 + v_0}{1 + \frac{v_1 v_0}{c^2}} = 0{,}03c = 9000 \text{ km/s}.$$

b. Non accade perché la sonda è un oggetto massivo.

c. La sonda 101 si muoverà con velocità

$$v_{101} = \frac{v_{100} + v_0}{1 + \frac{v_{100} v_0}{c^2}} = 0{,}770c.$$

d. L'aumento di velocità tra la sonda 266 e la sonda 265 è

$$\Delta v = v_{266} - v_{265} = \frac{v_{265} + v_0}{1 + \frac{v_{265} v_0}{c^2}} - v_{265} = 2 \cdot 10^{-4} c = 60 \text{ km/s}.$$

e. L'energia cinetica delle sonde rispetto alla Terra è data dall'espressione relativistica per l'energia cinetica $K = mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1\right)$.

Per la sonda 1 abbiamo

$$K_1 = mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}}\right) = 2{,}2 \cdot 10^{16} \text{ J}.$$

Per la sonda 265, invece, l'energia cinetica vale

$$K_{265} = mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_{265}^2}{c^2}}}\right) = 6{,}6 \cdot 10^{20} \text{ J}.$$

13 Problema esperto

a. *A* riceve un segnale di frequenza $f_{ric} = f_S\sqrt{\dfrac{c+v}{c-v}}$, poi lo riemette con la stessa frequenza con cui l'ha ricevuto: l'astronave riceve un segnale di frequenza $f_{SNS} = f_S\sqrt{\dfrac{c+v}{c-v}}\sqrt{\dfrac{c+v}{c-v}} = f_S\,\dfrac{c+v}{c-v}$.

Nota f_S, misurando f_{SNS} si calcola v

$$v = \frac{f_{SNS} - f_S}{f_{SNS} + f_S}c.$$

b. $\lambda_A = \lambda_S\sqrt{\dfrac{c+v}{c-v}} = 1{,}39\ \mu\text{m}$

c. $\Delta t = \dfrac{\Delta t_S}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} = 0{,}53\ \text{s}$

d. $d_A = \sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}} = 109\ \text{m}$

e. $p = (\gamma - 1)mc^2 = \left(\dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} - 1\right)mc^2 = 3{,}8\cdot 10^{-9}\ \text{J} = 2{,}4\cdot 10^{4}\ \text{MeV} = 24\ \text{GeV}$

14 Problema esperto

a. La quantità di moto totale del sistema elettrone-positrone è diretta come $\vec{v}$. Quindi anche la quantità di moto totale dei due fotoni deve avere la stessa direzione. La somma di un vettore diretto lungo $\vec{v}$ con un secondo vettore rivolto in direzione arbitraria non può essere rivolta nella direzione di $\vec{v}$. Quindi l'unica possibilità è che i due fotoni abbiano la stessa direzione anche se, come dice il testo, i loro versi sono opposti. La conservazione della quantità di moto porta all'espressione

$$\gamma m_0 v = \frac{hf_1}{c} - \frac{hf_2}{c}.$$

b. La conservazione dell'energia fornisce invece la relazione

$$\gamma m_0 c^2 + m_0 c^2 = h f_1 + h f_2.$$

Abbiamo quindi ottenuto il sistema lineare

$$\begin{cases} f_1 - f_2 = \dfrac{\gamma m_0 v c}{h} \\ f_1 + f_2 = \dfrac{(\gamma+1)\, m_0 c^2}{h} \end{cases}.$$

Sommando e sottraendo membro a membro otteniamo

$$\begin{cases} f_1 = \dfrac{m_0\,c}{2h}\left[(\gamma+1)c+\gamma v\right] \\ f_2 = \dfrac{m_0\,c}{2h}\left[(\gamma+1)c-\gamma v\right] \end{cases}.$$

c. Dai risultati precedenti calcoliamo

$$\frac{1}{E_1}+\frac{1}{E_2}=\frac{2}{m_0c\left[(\gamma+1)c+\gamma v\right]}+\frac{2}{m_0c\left[(\gamma+1)c-\gamma v\right]}=\frac{2}{m_0\,c}\left[\frac{1}{(\gamma+1)c+\gamma v}+\frac{1}{(\gamma+1)c-\gamma v}\right]=$$

$$=\frac{2}{m_0\,c}\frac{(\gamma+1)c-\gamma v+(\gamma+1)c+\gamma v}{\left[(\gamma+1)c+\gamma v\right]\left[(\gamma+1)c-\gamma v\right]}=\frac{4}{m_0}\frac{\gamma+1}{c^2(\gamma+1)^2-\gamma^2v^2}=\frac{4}{m_0}\frac{\gamma+1}{\gamma^2c^2-\gamma^2v^2+c^2(2\gamma+1)}=$$

$$=\frac{4}{m_0}\frac{\gamma+1}{\dfrac{c^2}{c^2-v^2}(c^2-v^2)+c^2(2\gamma+1)}=\frac{4}{m_0}\frac{\gamma+1}{c^2+c^2(2\gamma+1)}=\frac{4}{m_0}\frac{\gamma+1}{2c^2(\gamma+1)}=\frac{2}{m_0c^2}=\frac{2}{E_0}.$$

d. Con $v = 24c/25$ il fattore di dilatazione risulta

$$\gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{24}{25}\right)^2}}=\frac{1}{\sqrt{\dfrac{49}{25^2}}}=\frac{25}{7},$$

da cui otteniamo

$$E_1=h\,f_1=\frac{m_0\,c}{2}\left[(\gamma+1)c+\gamma v\right]=\frac{m_0\,c}{2}\left[\left(\frac{25}{7}+1\right)c+\frac{25}{7}\times\frac{24}{25}c\right]=\frac{m_0\,c}{2}\left[\frac{32}{7}c+\frac{24}{7}c\right]=4m_0\,c^2=$$

$$=4\cdot\left(9{,}11\cdot10^{-31}\,\text{kg}\right)\cdot\left(3{,}00\cdot10^{8}\,\text{m/s}\right)^2=3{,}28\cdot10^{-13}\,\text{J}.$$

E anche

$$E_2=h\,f_2=\frac{m_0\,c}{2}\left[(\gamma+1)c-\gamma v\right]=\frac{m_0\,c}{2}\left[\frac{32}{7}c-\frac{24}{7}c\right]=\frac{4}{7}m_0\,c^2=$$

$$=\frac{4}{7}\times\left(9{,}11\cdot10^{-31}\,\text{kg}\right)\cdot\left(3{,}00\times10^{8}\,\text{m/s}\right)^2=4{,}69\cdot10^{-14}\,\text{J}.$$

La somma delle energie finali è

$$E_1+E_2=4m_0\,c^2+\frac{4}{7}m_0\,c^2=\frac{32}{7}m_0\,c^2.$$

La somma delle energie iniziali vale

$$(\gamma+1)m_0\,c^2=\left(\frac{25}{7}+1\right)m_0\,c^2=\frac{32}{7}m_0\,c^2.$$

I due valori trovati sono uguali.