QUESITI

1 Quesito

Nell'esperimento di Rutherford, una sottile lamina d'oro fu bombardata con particelle alfa (positive) emesse da una sorgente radioattiva.
Secondo il modello atomico di Thompson le particelle alfa avrebbero dovuto avere angoli di diffusioni piccoli.
Fu osservato che, invece, quasi tutte le particelle alfa attraversavano la lamina in linea retta, ma alcune subivano deflessioni molto forti, fino a rimbalzare all'indietro.
Rutherford propose così un modello planetario, in cui l'atomo è costituito da un piccolo nucleo positivo al centro di una sfera molto più grande in cui si trovano gli elettroni.

2 Quesito

L'energia assorbita dall'atomo durante l'urto iniziale è la stessa del fotone che sarebbe emesso nel passaggio inverso, e quindi vale:

$$E_0 = hf_0 = hcR_H\left(1-\frac{1}{16}\right) = \left(6{,}63\cdot 10^{-34}\ \mathrm{J\cdot s}\right)\left(3{,}00\cdot 10^{8}\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)\left(1{,}097\cdot 10^{7}\ \mathrm{m}^{-1}\right)\times\frac{15}{16} = 2{,}05\cdot 10^{-18}\ \mathrm{J}.$$

Passando allo stato con numero quantico principale $n = 2$, l'elettrone provoca l'emissione di un fotone con energia

$$E_1 = hf_1 = hcR_H\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{16}\right) = \left(6{,}63\cdot 10^{-34}\ \mathrm{J\cdot s}\right)\left(3{,}00\cdot 10^{8}\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)\left(1{,}097\cdot 10^{7}\ \mathrm{m}^{-1}\right)\times\frac{3}{16} = 4{,}09\cdot 10^{-19}\ \mathrm{J}.$$

Quindi il fotone emesso quando l'elettrone passa allo stato fondamentale ha energia

$$E_2 = E_0 - E_1 = (2{,}05-0{,}41)\cdot 10^{-18}\ \mathrm{J} = 1{,}64\cdot 10^{-18}\ \mathrm{J}.$$

3 Quesito

L'energia di un singolo fotone è

$$E = hf = h\frac{c}{l} = \left(6{,}63\cdot 10^{-34}\ \mathrm{J\cdot s}\right)\frac{\left(3{,}0\cdot 10^{8}\ \mathrm{m/s}\right)}{\left(4{,}05\cdot 10^{-7}\ \mathrm{m}\right)} = 4{,}9\cdot 10^{-19}\ \mathrm{J}.$$

Il numero di fotoni assorbiti è

$$n = \frac{36\ \mathrm{J}}{4{,}9\cdot 10^{-19}\ \mathrm{J}} = 7{,}3\cdot 10^{19}.$$

4 Quesito

a. L'energia dei fotoni del fascio *B* è
$E = hf = (6{,}63\cdot 10^{-34}\ \mathrm{J\cdot s})\ (7{,}5\cdot 10^{14}\ \mathrm{s}^{-1}) = 3{,}1\ \mathrm{eV}.$
Tale energia è minore del lavoro di estrazione per il nickel, ossia dell'energia che si deve fornire per estrarre un elettrone dall'atomo di nickel.

b. L'energia cinetica massima dei fotoelettroni emessi a seguito dell'esposizione al fascio *A* è

$$K = hf - L_e \rightarrow K = \frac{\left(6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \text{J} \cdot \text{s}\right)\left(2{,}3 \cdot 10^{15}\ \text{s}^{-1}\right)}{\left(1{,}60 \cdot 10^{-19}\ \text{J/eV}\right)} - 5{,}2\ \text{eV} = 4{,}3\ \text{eV}.$$

PROBLEMI

5 Problema

a. Si trova

$$(\gamma^2 - 1)m^2c^2 = h^2\left[\frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{(\lambda')^2} - \frac{2}{\lambda\lambda'}\right] + 2mch\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'}\right). \qquad \text{(D)}$$

b. Si ottengono le equazioni

$$\gamma^2 m^2 v^2 \cos^2\alpha = h^2\left[\frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{(\lambda')^2}\cos^2\varphi - \frac{2}{\lambda\lambda'}\cos\varphi\right] \qquad \text{(E)}$$

e

$$\gamma^2 m^2 v^2 \operatorname{sen}^2\alpha = \frac{h^2}{(\lambda')^2}\operatorname{sen}^2\phi. \qquad \text{(F)}$$

c. Seguendo le indicazioni si trova l'equazione

$$\gamma^2 m^2 v^2 = h^2\left[\frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{(\lambda')^2} - \frac{2}{\lambda\lambda'}\cos\phi\right] \qquad \text{(G)}$$

e poi l'ulteriore uguaglianza

$$m^2(\gamma^2c^2 - c^2 - \gamma^2v^2) = 2mch\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'}\right) - \frac{2h^2}{\lambda\lambda'}(1 - \cos\phi). \qquad \text{(H)}$$

d. Il primo membro dell'equazione (H) risulta

$$k = \gamma^2\left(c^2 - v^2\right) - c^2 = \frac{c^2}{\left(c^2 - v^2\right)}\left(c^2 - v^2\right) - c^2 = 0.$$

Quindi l'equazione (H), divisa per $2h$, assume la forma

$$mc\frac{\lambda' - \lambda}{\lambda\lambda'} = \frac{h}{\lambda\lambda'}(1 - \cos\phi),$$

da cui si ottiene con facilità la relazione Compton

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{mc}(1 - \cos\phi).$$

6 Problema

a. Il lavoro di estrazione di un metallo è il lavoro necessario ad estrarre un elettrone dal metallo quando colpito da un fotone. Se il fotone che colpisce il metallo ha energia superiore al lavoro di estrazione, l'elettrone, detto fotoelettrone, viene emesso.

b. A parità di energia del fotone incidente, l'uranio emette fotoelettroni più energetici, perché il lavoro di estrazione dell'uranio è inferiore a quello dell'oro. In particolare,

$$K_{\max} = hf - W_0 = h\frac{c}{\lambda} - W_0.$$

Il lavoro d'estrazione dell'oro è

$$W_0^{\mathrm{Au}} = 5{,}1\,\mathrm{eV} = 5{,}1 \cdot 1{,}602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{J},$$

da cui

$$K_{\max}^{\mathrm{Au}} = 4{,}2 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{J}.$$

Il lavoro d'estrazione dell'uranio è

$$W_0^{\mathrm{U}} = 3{,}6\,\mathrm{eV} = 3{,}6 \cdot 1{,}602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{J},$$

da cui

$$K_{\max}^{\mathrm{U}} = 6{,}6 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{J}.$$

c. Per il bario si ha

$$K_{\max} = h\frac{c}{\lambda} - W_0^{\mathrm{Ba}} = 8{,}1 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{J}.$$

L'energia minima dei fotoelettroni emessi dal bario è data dal lavoro di estrazione, mentre quella massima è data dal lavoro di estrazione più l'energia cinetica massima. In formule

$$h f_{\max} = h\frac{v}{\lambda_{\min}} = W_0 + K_{\max} \quad \Rightarrow \quad \lambda_{\min} = \frac{hv}{W_0 + K_{\max}} = 1{,}60 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{m} = 160\,\mathrm{nm};$$

$$h f_{\min} = h\frac{v}{\lambda_{\max}} = W_0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{\max} = \frac{hv}{W_0} = 7{,}37 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{m} = 737\,\mathrm{nm}.$$

Il bario può emettere in tutto lo spettro visibile.
La variazione di lunghezza d'onda è data da

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{mc}(1 - \cos\theta) = 2\frac{h}{mc} = 4{,}86 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{m}.$$

d. La lunghezza d'onda di de Broglie è legata all'impulso dalla relazione $\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv}$. Possiamo quindi stimare la velocità dell'elettrone come

$$v = \frac{h}{\lambda m} = 3{,}6 \cdot 10^6\,\mathrm{m/s} \simeq 0{,}01c.$$

L'elettrone è relativistico, quindi la relazione $p = mv$ fornisce solo una stima della velocità, in quanto non è la relazione relativistica.

7 Problema

a. La serie spettrale è formata dalle lunghezze d'onda λ tali che $\frac{1}{\lambda} = R\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$, con $n > 1$.

La lunghezza d'onda maggiore si ha per $n = 2$:

$$\frac{1}{\lambda_{max}} = \left(1{,}097 \cdot 10^7\ \text{m}^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \quad \Rightarrow \quad \lambda_{max} = 122\ \text{nm}.$$

La lunghezza d'onda maggiore si ha per $n \to \infty$:

$$\frac{1}{\lambda_{min}} = \left(1{,}097 \cdot 10^7\ \text{m}^{-1}\right) \quad \Rightarrow \quad \lambda_{min} = 91\ \text{nm}.$$

La serie spettrale è nell'ultravioletto

b. Il fotone ha energia

$$E_{31} = E_3 - E_1 = -\left(13{,}6\ \text{eV}\right)\frac{1}{3^2} - \left(-13{,}6\ \text{eV}\right) = 12{,}1\ \text{eV}.$$

La corrispondente lunghezza d'onda è

$$\lambda = \frac{hc}{E_{31}} = \frac{\left(6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \text{J} \cdot \text{s}\right)\left(3{,}00 \cdot 10^8\ \text{m/s}\right)}{\left(12{,}1\ \text{eV}\right)\left(1{,}60 \cdot 10^{-19}\ \text{J/eV}\right)} = 103\ \text{nm}.$$

c. Sì, perché l'energia del fotone è maggiore del lavoro di estrazione per il silicio.

d. A seguito dell'urto vi è un trasferimento di quantità di moto e di energia dal fotone all'elettrone (effetto Compton). La lunghezza d'onda del fotone diffuso è maggiore di quella iniziale di una quantità che non dipende dall'energia (e quindi dalla lunghezza d'onda) del fotone ma dipende dall'angolo di diffusione θ, secondo la relazione

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c}(1 - \cos\theta) = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \text{J} \cdot \text{s}}{\left(9{,}1 \cdot 10^{-31}\ \text{kg}\right)\left(3{,}00 \cdot 10^8\ \text{m/s}\right)}\left(1 - \cos 90°\right) = 2{,}43 \cdot 10^{-12}\ \text{m}.$$

PROBLEMI ESPERTI

8 Problema esperto

a. Il potenziale di estrazione degli elettroni dal calcio è pari a 2,90 V, cioè ha lo stesso valore numerico del lavoro di estrazione espresso in elettronvolt. I due dati di 2,90 V e 1,11 V sono confrontabili, hanno lo stesso ordine di grandezza, e quindi è verosimile che si ottengano insieme in un esperimento di questo genere.

Allora calcoliamo l'energia cinetica massima

$$K_{max} = e\Delta V_a = \left(1{,}60 \cdot 10^{-19}\ \text{C}\right)\left(1{,}11\ \text{V}\right) = 1{,}78 \cdot 10^{-19}\ \text{J}$$

e il lavoro di estrazione per il calcio, che risulta

$$W_e = \left(2{,}90\ \text{eV}\right)\left(1{,}60 \cdot 10^{-19}\ \frac{\text{J}}{\text{eV}}\right) = 4{,}64 \cdot 10^{-19}\ \text{J}.$$

Da questi valori, l'energia dei fotoni incidenti è

$$E_\gamma = W_e + K_{max} = (1{,}78 + 4{,}64) \cdot 10^{-19}\ \text{J} = 6{,}42 \cdot 10^{-19}\ \text{J}.$$

b. La frequenza e la lunghezza d'onda dei fotoni usati per l'esperimento sono

$$f = \frac{E_\gamma}{h} = \frac{6{,}42 \cdot 10^{-19}\ \text{J}}{6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \text{J} \cdot \text{s}} = 9{,}68 \cdot 10^{14}\ \text{Hz} = 968\ \text{Thz}$$

e

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3{,}00 \cdot 10^{8}\ \text{m/s}}{9{,}68 \cdot 10^{14}\ \text{Hz}} = 3{,}10 \cdot 10^{-7}\ \text{m} = 310\ \text{nm}.$$

Si tratta di radiazioni che si situano nell'ultravioletto.

c. L'energia luminosa E_L che giunge sulla lastrina nell'intervallo di tempo $\Delta t = 1{,}00$ s è

$$E_L = E_R A \Delta t = \left(140\ \frac{\text{W}}{\text{m}^2}\right)\left(3{,}80 \cdot 10^{-4}\ \text{m}^2\right)\left(1{,}00\ \text{s}\right) = 5{,}32 \cdot 10^{-2}\ \text{J}.$$

Quindi il numero di fotoni che giungono sulla lastrina in un secondo è

$$N_\gamma = \frac{5{,}32 \cdot 10^{-2}\ \text{J}}{6{,}42 \cdot 10^{-19}\ \text{J}} = 8{,}29 \cdot 10^{16}.$$

d. Il numero di elettroni emessi in un secondo dal calcio e raccolti nella corrente di saturazione è

$$N_e = \frac{i_s \Delta t}{e} = \frac{\left(5{,}31 \cdot 10^{-8}\ \text{A}\right) \times \left(1{,}00\ \text{s}\right)}{1{,}60 \cdot 10^{-19}\ \text{C}} = 3{,}32 \times 10^{11}.$$

Il valore cercato dell'efficienza di emissione di fotoelettroni è

$$\eta = \frac{N_e}{N_\gamma} = \frac{3{,}32 \cdot 10^{11}}{8{,}29 \cdot 10^{16}} = 4{,}00 \cdot 10^{-6},$$

pari a 4 parti per milione.

9 Problema

a. Un corpo nero ideale è un oggetto che assorbe tutta radiazione che lo colpisce, senza rifletterla, che poi viene riemessa sotto forma di radiazione elettromagnetica, il cui spettro dipende solo dalla temperatura del corpo. Lo spettro della radiazione elettromagnetica emessa da Antares (e da tutte le altre stelle) è approssimativamente quello di un corpo nero a temperatura T, che è la temperatura superficiale. Antares si presenta rossa perché la temperatura superficiale è circa 3000 K.

b. La legge di spostamento di Wien pone in relazione la lunghezza d'onda massima della radiazione emessa e la temperatura del corpo nero:

$$\lambda_{\max} T = 2{,}9 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m \cdot K} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{2{,}9 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m \cdot K}}{\lambda_{\max}} = \frac{2{,}9 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m \cdot K}}{8{,}00 \cdot 10^{-7}} = 3625\,\mathrm{K}.$$

c. La lunghezza d'onda massima è nell'infrarosso vicino, quindi le lunghezze d'onda intorno al picco della distribuzione del corpo nero corrispondono a una radiazione di coloro rosso-arancio. Antares è quindi la stella in basso a sinistra di colore rossastro.

d. La legge di Stefan-Boltzmann descrive l'energia irradiata da un corpo nero in 1 secondo da 1 m^2 di superficie. Quindi l'energia totale irradiata in 1 secondo da Antares è

$$E_{tot} = \sigma T^4 a \pi R^2 = 1{,}77 \cdot 10^{32}\,\mathrm{J},$$

dove R è il raggio di Antares. La potenza totale è dunque

$$P_{tot} = \frac{E_{tot}}{\Delta t} = \frac{1{,}77 \cdot 10^{32}\,\mathrm{J}}{1\,\mathrm{s}} = 1{,}7 \cdot 10^{32}\,\mathrm{W}.$$

10 Problema sulle competenze

a. Si analizza lo spettro luminoso emesso dalla stella: per la legge di Wien, la lunghezza d'onda per la quale si ha il massimo dell'emissione e la temperatura superficiale T della stella sono legate dalla relazione $\lambda_{\max} T = 0{,}290 \cdot 10^{-3}$ m · K.

b. Per la legge di Stefan-Boltzmann, la potenza totale emessa dalla stella è

$$P = 4\pi R_s^2 s T_s^4 = 4\pi \left(1{,}5 \cdot 10^8\,\mathrm{m}\right)^2 \left(5{,}67 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{W \cdot m^{-2} \cdot K^{-4}}\right) \left(3200\,\mathrm{K}\right)^4 = 1{,}7 \cdot 10^{24}\,\mathrm{W}.$$

c. La potenza totale P emessa dalla stella attraversa la sfera avente raggio uguale al raggio dell'orbita R_{sp}. Quindi

$$I = \frac{P}{4\pi R_{sp}^2} = \frac{1{,}7 \cdot 10^{24}\,\mathrm{W}}{4\pi\left(2{,}4 \cdot 10^9\,\mathrm{m}\right)^2} = 2{,}3 \cdot 10^4\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}.$$

d. All'equilibrio la potenza P_p assorbita dal pianeta è uguale alla potenza P_t che esso emette sotto forma di radiazione termica come corpo nero alla temperatura di equilibrio T_E:

$$P_p = P_t \quad \Rightarrow \quad \pi R_p^2 \cdot I = 4\pi R_s^2 s T_s^4 \quad \Rightarrow \quad T_E = \sqrt[4]{\frac{I}{4\sigma}} = \sqrt[4]{\frac{2{,}3 \cdot 10^4\,\mathrm{W/m^2}}{4 \cdot \left[5{,}67 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{W/(m^2 \cdot K^4)}\right]}} = 564\,\mathrm{K}.$$

e. Gli astronomi sperano di poter osservare le righe di assorbimento dei gas presenti nell'atmosfera del pianeta. Poiché ogni elemento o molecola ha il suo spettro caratteristico, osservare le linee scure (di assorbimento) nello spettro della stella indica la presenza di quel particolare elemento o composto fra i gas dell'atmosfera planetaria.