QUESITI

1 Quesito

A ogni particella materiala con una quantità di moto $\vec{p}$ corrisponde una lunghezza d'onda, detta di De Broglie, data da:

$$\lambda = \frac{h}{p}. \qquad (1)$$

Nel modello corpuscolare di Bohr l'elettrone percorre una delle orbite permesse, di raggio r_n, senza irradiare energia.
Nel modello ondulatorio l'elettrone è un'onda stazionaria che si richiude su se stessa, cioè riacquista dopo un giro la stessa fase.
Perché l'onda si richiuda a ogni giro, la lunghezza $2\pi\, r_n$ dell'orbita non può essere arbitraria, ma deve essere un multiplo della lunghezza d'onda dell'elettrone:

$$2\pi\, r_n = \mathrm{n}\, \lambda. \qquad (2)$$

L'onda che nel modello di de Broglie descrive un elettrone in orbita attorno al nucleo è un'onda stazionaria lungo una circonferenza, analoga all'onda meccanica che si produce quando un sottile anello metallico è fatto vibrare a una delle sue frequenze di risonanza: a tale frequenza corrisponde una lunghezza d'onda che soddisfa la (2).
Confrontando la (1) con la (2), e scrivendo p_n al posto di p, si ottiene

$$2\pi\, r_n\, p_n = n\, h,$$

che è proprio la condizione di quantizzazione di Bohr per un'orbita circolare dell'atomo di idrogeno.

2 Quesito

Nell'esperimento ipotizzato si avrebbe, nel caso estremo,

$$\Delta p\, \Delta x = m \Delta v\, \Delta x = \left(1{,}67 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg}\right)\left(5 \cdot 10^{3}\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)\left(4 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{m}\right) = 3 \cdot 10^{-35}\ \mathrm{J \cdot s}.$$

Il valore numerico di $\hbar/2$ è, invece

$$\frac{\hbar}{2} = \frac{h}{4\pi} = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \mathrm{J \cdot s}}{4\pi} = 5{,}28 \cdot 10^{-35}\ \mathrm{J \cdot s}.$$

Questo dato è maggiore del valore numerico ipotizzato per il prodotto $\Delta p\, \Delta x$, per cui la precisione proposta sulla misura della velocità del protone non è realizzabile.

3 Quesito

L'assorbimento di un'energia uguale a quella di ionizzazione libera l'elettrone meno legato (quello con $n = 3$). Quindi la configurazione dello ione Na^+ è $1s^2\, 2s^2\, 2p^6$.

4 Quesito

a. La lunghezza d'onda di de Broglie di una particella con quantità di moto p è $\lambda = h/p$. Nel caso in esame

$$p = \frac{h}{l} = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \text{J} \cdot \text{s}}{6{,}5 \cdot 10^{-7}\ \text{s}^{-1}} = 1{,}0 \cdot 10^{-27}\ \text{kg} \cdot \text{m/s}.$$

b. Utilizzando la formula classica per la quantità di moto $p = mv$ si ha

$$v = \frac{p}{m} = \frac{1{,}0 \cdot 10^{-27}\ \text{kg} \cdot \text{m/s}}{9{,}1 \cdot 10^{-31}\ \text{kg}} = 1{,}1\ \text{km/s}.$$

La velocità dell'elettrone è molto minore della velocità della luce, per cui si tratta di un elettrone non relativistico.

PROBLEMI

5 Problema

a. I numeri quantici degli elettroni del carbonio sono:

$$1\,\text{s}^2\!: n = 1,\ l = 0,\ m = 0,\ m_s = \pm\frac{1}{2},$$

$$2\,\text{s}^2\!: n = 2,\ l = 0,\ m = 0,\ m_s = \pm\frac{1}{2},$$

e i due elettroni nel livello 2 p possono scegliere 2 tra le seguenti configurazioni elettroniche

$$n = 2,\ l = 1,\ m = 1,\ m_s = \pm\frac{1}{2}$$

oppure

$$n = 2,\ l = 1,\ m = -1,\ m_s = \pm\frac{1}{2},$$

che, in assenza di un campo magnetico esterno, sono energeticamente equivalenti.

b. Tale configurazione non è possibile per via del principio di esclusione di Pauli: in un atomo due elettroni non possono avere lo stesso insieme di valori dei quattro numeri quantici. Nel livello 1s sono disponibili sono due configurazioni, distinte dal valore del numero quantico di spin dell'elettrone.

c. Stato fondamentale dell'azoto N: $1\,\text{s}^2\ 2\,\text{s}^2\ 2\,\text{p}^3$.

d. La formula generale per atomi o ioni con un solo elettrone orbitante intorno a un nucleo di carica Z è data da

$$E_n = -(13{,}6\ \text{eV})\frac{Z^2}{n^2}.$$

Lo ione di elio He^+ ha effettivamente un solo elettrone orbitante intorno al nucleo (quindi la formula si applica) e il nucleo è composto da 2 protoni, ovvero $Z = 2$.

e. L'elettrone rimasto ha numero quantico principale $n = 1$. L'energia di legame è data da

$$E_1 = (-13{,}6\ \text{eV}) \cdot 4 = -54{,}4\ \text{eV}.$$

L'energia necessaria a strappare l'unico elettrone è dunque 54,4 eV.
Un fotone di lunghezza d'onda 37 nm ha energia

$$E = hf = \frac{hv}{\lambda} = \frac{(6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \text{J} \cdot \text{s})(3 \cdot 10^8\ \text{m/s})}{37 \cdot 10^{-9}\ \text{m}} = 5{,}3 \cdot 10^{-18}\ \text{J} = 33\ \text{eV (minore di 54,4 eV)},$$

quindi non abbastanza da strappare l'unico elettrone dello ione di elio.

6 Problema

a. $$\Delta E = hf = \frac{hc}{\lambda} = \frac{(6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \text{J} \cdot \text{s})(3{,}00 \cdot 10^8\ \text{m/s})}{6{,}71 \cdot 10^{-7}\ \text{m}} = 2{,}96 \cdot 10^{-19}\ \text{J}.$$

In eV:

$$\Delta E = \frac{2{,}96 \cdot 10^{-19}\ \text{J}}{1{,}60 \cdot 10^{-19}\ \text{J/eV}} = 1{,}85\ \text{eV}.$$

b. La configurazione è $1\,s^2\,2\,s$. La configurazione $1\,s^3$ è vietata dal principio di Pauli, secondo il quale due elettroni di uno stesso atomo non possono avere gli stessi numeri quantici. Nello stato $1\,s^3$ almeno due elettroni dovrebbero avere gli stessi numeri quantici principali ($n = 1$), orbitali ($l = 0$), magnetici ($m = 0$) e di spin (o 1/2 o –1/2).

c. Lo ione litio Li^+ ha una carica $q = |e| = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C. Attraversando una differenza di potenziale di 150 V acquista un'energia cinetica
$K = |e|\, V = 150$ eV
o, equivalentemente,
$K = q\, V = (1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{C})\ (150\ \text{J/C}) = 2{,}4 \cdot 10^{-17}$ J.

d. Per particelle non relativistiche,

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2mK}} = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \text{J} \cdot \text{s}}{\sqrt{2(1{,}16 \cdot 10^{-26}\ \text{kg})(2{,}4 \cdot 10^{-17}\ \text{J})}} = 8{,}9 \cdot 10^{-13}\ \text{m}.$$

e. No. La lunghezza d'onda degli ioni litio è molto minore delle dimensioni del forellino, per cui non si rilevano apprezzabili fenomeni di diffrazione.

7 Problema Con gli integrali e le equazioni differenziali

a. Sulla base delle premesse, la probabilità richiesta si ottiene integrando la (B) su tutta l'ampiezza della scatola. Occorre quindi calcolare l'integrale definito

$$I=\int_0^L\left[\Psi_n(x)\right]^2\,\mathrm{d}x=\frac{2}{L}\int_0^L \mathrm{sen}^2\frac{n\pi x}{L}\,\mathrm{d}x=\frac{\cancel{2}}{L}\frac{1}{\cancel{2}}\int_0^L\left(1-\cos\frac{2n\pi x}{L}\right)\mathrm{d}x.$$

Possiamo ora porre

$$y=\frac{2n\pi x}{L}\quad\Rightarrow\quad \mathrm{d}x=\frac{L}{2n\pi}\,\mathrm{d}y$$

e quindi scriviamo

$$I=\frac{1}{L}\int_0^L\left(1-\cos\frac{2n\pi x}{L}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{L}\frac{L}{2n\pi}\int_0^{2n\pi}(1-\cos y)\,\mathrm{d}y=\frac{1}{2n\pi}\left[y-\mathrm{sen}\,y\right]_0^{2n\pi}=\frac{1}{2n\pi}2n\pi=1.$$

Il risultato ottenuto indica che vi è la certezza di trovare la particella all'interno della «scatola». Visto che x e L sono entrambe delle lunghezze, per fare in modo che l'argomento della funzione seno sia un numero puro il parametro n deve a sua volta essere un numero puro.

b. La funzione $\mathrm{sen}^2 x$ è periodica di periodo π. Ponendo

$$\frac{n\pi x}{L}=\pi$$

otteniamo come soluzione

$$x=\frac{L}{n}.$$

Quindi tra $x = 0$ e $x = L/n$ avviene una delle n oscillazioni, tutte identiche tra di loro, che la funzione integranda $\left[\Psi_n(x)\right]^2$ compie nella scatola. Di conseguenza la probabilità richiesta è uguale a $1/n$.

c. Abbiamo

$$\frac{\mathrm{d}\Psi_n(x)}{\mathrm{d}t}=\sqrt{\frac{2}{L}}\frac{n\pi}{L}\cos\frac{n\pi x}{L}$$

e quindi troviamo

$$-\frac{h^2}{8\pi^2 m}\frac{\mathrm{d}^2\Psi_n(x)}{\mathrm{d}t^2}=-\frac{h^2}{8\pi^2 m}\sqrt{\frac{2}{L}}\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2\left(-\mathrm{sen}\frac{n\pi x}{L}\right)=\frac{h^2 n^2}{8mL^2}\left[\sqrt{\frac{2}{L}}\,\mathrm{sen}\frac{n\pi x}{L}\right]=\frac{h^2 n^2}{8mL^2}\,\Psi_n(x).$$

L'equazione differenziale trovata si riconduce alla forma (C) ponendo

$$E_n=\frac{h^2 n^2}{8mL^2}.$$

d. Il minimo valore di E_n, in funzione di n, è

$$E_1=\frac{h^2}{8mL^2}.$$

Tutti gli altri valori di E_n sono della forma

$$E_n = n^2 E_1,$$

cioè sono direttamente proporzionali al quadrato di n.

PROBLEMI ESPERTI

8 Problema esperto

a. Visto che n è un numero puro, l'unità di misura di E_n è

$$\frac{\mathrm{J}^2 \cdot \mathrm{s}^2}{\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2} = \frac{\mathrm{J}^2}{\mathrm{J}} = \mathrm{J}.$$

Quindi le quantità E_n sono dei valori di energia, contraddistinti dal valore di n. Perciò, in analogia con quanto visto in relazione all'atomo di Bohr, n può essere descritto come il numero quantico che distingue tra loro i vari stati del sistema. In effetti, anche le diverse funzioni d'onda (A) differiscono tra loro solo per il valore di n.

b. Visto che sulla particella nella «scatola» non agiscono forze, E_n dev'essere un'energia cinetica. Dalla relazione $K = p^2/(2m)$ otteniamo, allora

$$p_n = \pm\sqrt{2mE_n} = \pm\sqrt{2m\frac{h^2}{8mL^2}n^2} = \pm\frac{h}{2L}n.$$

I moduli minimi di p_n si hanno per $n = 1$.

c. Dalla formula **(A)** troviamo

$$\Psi_n(0) = \sqrt{\frac{2}{L}}\mathrm{sen}\frac{n\pi 0}{L} = 0 \quad \text{e} \quad \Psi_n(L) = \sqrt{\frac{2}{L}}\mathrm{sen}\frac{n\pi L}{L} = 0.$$

Visto che la particella non può uscire dalla «scatola», ai suoi estremi la funzione d'onda, e quindi la probabilità di trovare la particella, si annulla. La situazione è analoga al fatto che l'ampiezza di un'onda stazionaria su una corda si annulla agli estremi.

Sempre in analogia con le onde stazionarie su una corda, la lunghezza d'onda della funzione **(A)** per i vari valori di n è:

$$\lambda_n = \frac{2L}{n}.$$

d. Ponendo $\Psi_n(x) = 0$ si ottiene

$$\frac{n\pi}{L}x = k\pi,$$

con k intero relativo; si trova la soluzione

$$x = k\frac{L}{n}.$$

Con la condizione $0 \le x \le L$, i valori di k accettabili sono gli interi compresi tra 0 e n, estremi inclusi. Quindi abbiamo $n + 1$ nodi, compresi i due agli estremi.
La funzione $\Psi_4(x)$ ha lunghezza d'onda $\lambda_4 = L/2$ e quindi possiede cinque nodi: due agli estremi, uno nel punto medio della scatola e altri due posti nelle posizioni $L/4$ e $(3/4)L$. La funzione d'onda $\Psi_8(x)$ha gli stessi nodi, più altri quattro posti nei punti medi tra due nodi successivi di $\Psi_4(x)$. Però questi quattro nodi non sono nodi della funzione che si ottiene sovrapponendo le due funzioni d'onda. Quindi la funzione $\Psi(x)$ possiede cinque nodi.

9 Problema sulle competenze

a. Per un'onda di de Broglie si ha

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv} \quad \Rightarrow \quad mv\lambda = h.$$

La condizione per avere onde stazionarie associate all'elettrone è

$$2\pi r = n\lambda \quad \Rightarrow \quad r = \frac{n\lambda}{2\pi}.$$

Il momento angolare dell'elettrone è dato da

$$L = mvr = mv\frac{n\lambda}{2\pi}.$$

Utilizzando il fatto che l'onda è di de Broglie, si ottiene

$$L = \frac{n(mv\lambda)}{2\pi} = \frac{nh}{2\pi}.$$

b. Calcoliamo la lunghezza d'onda relativa alla transizione:

$$\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2}\right) = 1{,}1 \cdot 10^7\ \mathrm{m}^{-1} \quad \Rightarrow \quad \lambda = 656\ \mathrm{nm},$$

quindi la linea C.

c. La frequenza massima corrisponde al valore massimo di $1\ \lambda$. Per $n \to +\infty$ si ha

$$\frac{1}{\lambda_\infty} = R \quad \Rightarrow \quad f_{\max} \simeq \frac{c}{\lambda_\infty} = 3{,}3 \cdot 10^{15}\ \mathrm{Hz},$$

ovvero nell'infrarosso.

d. Lo spettro continuo in figura è lo spettro di Bremsstrahlung, emesso dagli elettroni che decelerano a causa degli urti contro gli atomi del bersaglio. Per quanto riguarda le righe, se gli elettroni che colpiscono la targhetta di tungsteno hanno energia sufficiente da espellere elettroni nel guscio K, elettroni dai gusci più esterni possono occupare il guscio K e la transizione avviene accompagnata dall'emissione di un fotone X. Le righe corrispondono ai fotoni X emessi.

10 Problema esperto

a. Gli ioni cromo presenti nel cristallo assorbono la componente verde-blu, per cui il rubino trasmette principalmente la componente rossa della luce che incide su di esso.

b. Sì. La frequenza e l'energia di un fotone «blu» sono maggiori di quelle di un fotone «verde». Per raggiungere uno stato meno legato, l'elettrone dello stato fondamentale deve assorbire un fotone di energia maggiore, quello «blu» appunto.

c. La differenza di energia è uguale all'energia del fotone:

$$\Delta E = hf = \frac{hc}{\lambda} = \frac{\left(6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \mathrm{J \cdot s}\right)\left(3{,}00 \cdot 10^{8}\ \mathrm{m/s}\right)}{6{,}943 \cdot 10^{-7}\ \mathrm{m}} = 2{,}86 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{J}.$$

In eV:

$$\Delta E = \frac{2{,}86 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{J}}{1{,}60 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{J/eV}} = 1{,}79\ \mathrm{eV}.$$

d. Il modello B. Infatti, per $\lambda \approx 700$ nm = 0,7 μm ha una grandissima attenuazione, pari a circa 10^7 volte. Al contrario, il modello A trasmette quasi interamente nella zona rossa dello spettro.

e. Quello a destra: poiché attenua solo la componente blu-verde (con $\lambda < 600$ nm), trasmette molto bene nel rosso-giallo per cui le sue lenti sembrano rossastre.