Soluzioni della prova di fisica per prepararsi all'esame
Elettromagnetismo
19 dicembre 2016

a cura di Steave Selvaduray e Gianni Melegari

PROBLEMA

a) Le forze agenti sull'elettrone sono la forza elettrica $-e\vec{E}$ e quella magnetica $-e\vec{v}\times\vec{B}$. Siccome, in condizioni di equilibrio, l'elettrone si muove di moto circolare uniforme, essendo solidale al disco, allora la somma delle due forze precedenti deve essere pari alla forza centripeta $-m\omega^2\vec{r}$, dove $\vec{r}$ è il raggio vettore che unisce il centro del disco con.
Dunque, si ha la seguente equazione delle forze

$$-e\vec{E} - e\vec{v}\times\vec{B} = -m\omega^2\vec{r}$$

ovvero:

$$e\vec{E} + e\vec{v}\times\vec{B} = m\omega^2\vec{r}\,.$$

Da quest'ultima equazione si deduce l'espressione del campo elettrico:

$$\vec{E} = -\vec{v}\times\vec{B} + \frac{m}{e}\omega^2\vec{r}\,.$$

Valutiamo i due termini presenti nella formula, che definisce il campo elettrico, in corrispondenza di un elettrone sul bordo del disco:

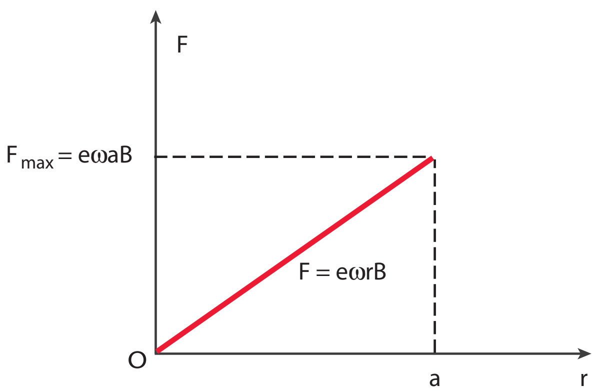
$$\left|-\vec{v}\times\vec{B}\right| = vB = \omega aB = 20{,}8\ \mathrm{N/C},$$
$$\left|\frac{m}{e}\omega^2\vec{a}\right| = 1{,}92\cdot 10^{-8}\ \mathrm{N/C}.$$

E' evidente che il secondo termine può essere trascurato rispetto al primo.

b) Dunque, possiamo assumere per il modulo del campo elettrico la seguente espressione

$$E = \omega rB,$$

dove r è la distanza dell'elettrone dal centro. Il grafico del modulo della forza elettrica $F = eE$ in relazione a r è il seguente



Il lavoro W richiesto si calcola determinando l'area racchiusa dal grafico limitata dalle rette $r = 0$ m, $r = a$ e $F = 0$ N. Di conseguenza, si ottiene:

$$W = \frac{1}{2}F_{max}\cdot a = \frac{1}{2}e\omega a^2 B$$

A questo punto, per ottenere la forza elettromotrice $\mathcal{E}$ indotta basta dividere il lavoro per la carica dell'elettrone:

$$\mathcal{E} = \frac{W}{e} = \frac{1}{2}\omega a^2 B.$$

c) La variazione di area ΔS corrisponde all'area del settore circolare di ampiezza angolare $\Delta\alpha$. Dunque, si ha:

$$\Delta S = \frac{1}{2}a^2\Delta\alpha.$$

Di conseguenza, la corrispondente variazione di flusso del campo magnetico è data da:

$$\Delta\Phi = B\Delta S = \frac{1}{2}a^2\Delta\alpha B.$$

L'applicazione della legge dell'induzione elettromagnetica fornisce:

$$\mathcal{E} = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = \frac{1}{2}a^2\frac{\Delta\alpha}{\Delta t}B = \frac{1}{2}\omega a^2 B.$$

(Abbiamo trascurato il segno -).
L'espressione ottenuta coincide con quella trovata nel punto b).

d) Per determinare la velocità angolare ω, corrispondente ad ogni tabella, possiamo considerare la seguente formula

$$\omega = 2\pi\frac{(N_4 - N_3)/4}{t_4 - t_3} = \frac{\pi}{2}\frac{N_4 - N_3}{t_4 - t_3},$$

dove gli indici 3 e 4 individuano rispettivamente la terza e la quarta riga della tabella considerata. Si ottiene, quindi la seguente tabella:

ω **(rad/s)**	***I*** **(A)**
4,00	5,89
5,20	7,66
6,10	8,98
7,50	11,0

Posto:

$$m_{sper} = \frac{5{,}89\ \mathrm{A}}{4{,}00\ \mathrm{rad/s}} = 1{,}47\,\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{rad}},$$

è facile verificare che sussiste con buona approssimazione la seguente legge di proporzionalità:

$$I = m_{sper}\omega.$$

Non ci resta che ricavare il valore della pendenza attraverso metodi teorici. Utilizzando l'espressione della forza elettromotrice $\mathcal{E}$ ottenuta in b) e ricordando la legge di Ohm, si deduce:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = \left(\frac{a^2 B}{2R}\right)\omega,$$

da cui si ottiene:

$$m_{teor} = \frac{a^2 B}{2R} = 1{,}47\,\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{rad}}.$$

Dunque, il valore teorico della pendenza coincide con quello determinato sperimentalmente.

QUESITI

Quesito 1

La forza elettrica $\vec{F_e}$ agente sulla carica q è data da:

$$\vec{F_e} = q\vec{E},$$

dove il campo elettrico $\vec{E}$ generato dal conduttore indefinito ha la seguente espressione:

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\,\hat{n}.$$

(Indichiamo con $\hat{n}$ il versore, nel piano contenente il conduttore e la carica, perpendicolare al conduttore e rivolto verso il basso.) Di conseguenza, si ottiene:

$$\vec{F_e} = \frac{q\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\hat{n}.$$

La carica in gioco si muove di moto rettilineo uniforme se e solo se la forza magnetica $\vec{F_m}$, prodotta dalla corrente è opposta alla forza elettrica.
Ricordando la legge di Biot-Savart che fornisce il campo magnetico $\vec{B}$ prodotto da un filo rettilineo indefinito e l'espressione della forza magnetica $\vec{F_m} = q\vec{v}\times\vec{B}$ agente sulla carica q, si deduce che $\vec{F_m}$ è opposta a $\vec{F_e}$ se e solo se I e $\vec{v}$ hanno lo stesso verso.
Con riferimento alla figura, la forza magnetica $\vec{F_m}$ agente sulla carica q è data da:

$$\vec{F_m} = q\vec{v}\times\vec{B} = -q\,\frac{\mu_0 I}{2\pi r}v\,\hat{n}.$$

Dalla condizione di equilibrio $\vec{F_e} + \vec{F_m} = \vec{0}$, si deduce:

$$\frac{\mu_0 I}{2\pi r}v = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r},$$

da cui segue:

$$\mu_0 I v = \frac{\lambda}{\varepsilon_0},$$

e infine:

$$\frac{\lambda}{I} = v\mu_0\varepsilon_0.$$

Quesito 2

Ricordando la definizione di prodotto vettoriale fra due vettori, seguono i seguenti prodotti vettoriali fra i versori:

$$\hat{x}\times\hat{x} = \hat{y}\times\hat{y} = \hat{z}\times\hat{z} = \vec{0},$$
$$\hat{x}\times\hat{y} = -\hat{y}\times\hat{x} = \hat{z},$$
$$\hat{y}\times\hat{z} = -\hat{z}\times\hat{y} = \hat{x},$$
$$\hat{z}\times\hat{x} = -\hat{x}\times\hat{z} = \hat{y}.$$

Indicando con $\vec{F}$ la forza di Lorentz che agisce sul protone di carica e, si ha:

$$\frac{\vec{F}}{e} = \vec{E} + \vec{v}\times\vec{B} = 10^6\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}\hat{x} - 10^6\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}\ \hat{y} + 2\cdot 10^6\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}\hat{z} +$$
$$+\left(10^6\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\hat{x} + 5\cdot 10^6\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\ \hat{y}\right)\times(2\ \mathrm{T}\ \hat{x} - 1\ \mathrm{T}\ \hat{z}).$$

Sviluppando il prodotto vettoriale, presente nell'espressione precedente, attraverso la lista dei prodotti vettoriali fra versori, si ottiene:

$$\frac{\vec{F}}{e} = -4 \cdot 10^6 \ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}} \ \hat{x} - 8 \cdot 10^6 \ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}} \ \hat{z},$$

da cui segue:

$$\left|\frac{\vec{F}}{e}\right| = \frac{F}{e} = 10^6 \cdot 4\sqrt{5} \ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}.$$

Quesito 3

Consideriamo una sfera di raggio $r \geq R$ concentrica alla sfera carica. Attraverso semplici considerazioni di simmetria unite al teorema di Gauss, si ottiene:

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0},$$

dove E è il modulo del campo elettrico e ε_0 è la costante dielettrica del vuoto.
Dunque, si ha:

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}.$$

Consideriamo ora una sfera di raggio $0 < r \leq R$ concentrica alla sfera carica; osserviamo, preventivamente, che la carica q contenuta all'interno di essa, soddisfa la seguente relazione:

$$\rho = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi r^3} = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi r R^3},$$

da cui segue immediatamente:

$$q = \frac{Q}{R^3} r^3$$

Procedendo in modo analogo a quanto visto in precedenza, il teorema di Gauss fornisce:

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0},$$

e quindi:

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^3} r.$$

Sostituendo i valori numerici, si ricava infine:

$$E = \begin{cases} 8{,}6 \cdot 10^8 \ \dfrac{\mathrm{N}}{\mathrm{C \cdot m}} \ r, & 0 \leq r < 5{,}0 \cdot 10^{-2} \ \mathrm{m} \\ 1{,}1 \cdot 10^5 \ \dfrac{\mathrm{N \cdot m^2}}{\mathrm{C}} \ \dfrac{1}{r^2}, & r \geq 5{,}0 \cdot 10^{-2} \ \mathrm{m} \end{cases}$$

Il problema non può essere formulato in modo identico per una sfera conduttrice poiché, all'equilibrio elettrostatico, la carica si distribuisce interamente sulla superficie esterna di tale conduttore.
Risolviamo l'ultimo punto del quesito. Il sistema di sfere concentriche, con carica ρ distribuita nella corona sferica, è equivalente al sistema costituito dalla sfera di raggio R_2 con densità ρ e dalla sfera di raggio R_1 con densità $-\rho$. Per il principio di sovrapposizione dei campi elettrostatici, si ha che il campo elettrico $\vec{E}$ in un punto P a distanza r dal centro delle sfere, con $R_1 \leq r \leq R_2$, è dato da:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2,$$

dove $\vec{E}_1$ è il campo elettrico generato dalla sfera di raggio R_1 con densità $-\rho$, mentre $\vec{E}_2$ è il campo elettrico generato dalla sfera di raggio R_2 con densità ρ.
Per i calcoli fatti in precedenza si ha:

$$\vec{E}_1 = \frac{-\rho \cdot \frac{4}{3}\pi R_1^3}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,\hat{n} = \frac{-\rho \cdot \frac{4}{3}\pi R^3}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,\hat{n} = \frac{-Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,\hat{n} = -1{,}1 \cdot 10^5\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C{\cdot}m}}\,\frac{1}{r^2}\,\hat{n},$$

$$\vec{E}_2 = \frac{\rho \cdot \frac{4}{3}\pi R_2^3}{4\pi\varepsilon_0 R_2^3}\,r\,\hat{n} = \frac{\rho \cdot \frac{4}{3}\pi R^3}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\,r\,\hat{n} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\,r\vec{n} = 8{,}6 \cdot 10^8\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C{\cdot}m}}\,r\,\hat{n},$$

dove $\hat{n}$ è il versore concorde al vettore che unisce il centro delle sfere con il punto P. Di conseguenza, si ha:

$$E = \left|-1{,}1 \cdot 10^5\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C{\cdot}m}}\,\frac{1}{r^2} + 8{,}6 \cdot 10^8\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C{\cdot}m}}\,r\right|, \quad \text{con } R_1 \leq r \leq R_2.$$