ESAME DI STATO
DI LICEO SCIENTIFICO
2000
Indirizzo Scientifico
Progetto Brocca

La prova

Il candidato svolga una breve relazione su uno solo dei seguenti temi, a sua scelta.

Tema 2

Sono disponibili una pila di forza elettromotrice $f.e.m. = 4{,}5\,\mathrm{V}$ e due lampadine, A e B, costruite per essere utilizzate con una differenza di potenziale $\Delta V = 4{,}5\,\mathrm{V}$ e aventi, rispettivamente, le potenze $P_A = 3\,\mathrm{W}$ e $P_B = 5\,\mathrm{W}$.

La pila eroga una corrente di intensità $I = 6\,\mathrm{A}$ se è posta in condizione di cortocircuito per un breve istante.

Il candidato:

- spieghi i concetti di forza elettromotrice di una pila e di differenza di potenziale disponibile ai suoi morsetti, proponendo anche la relazione matematica tra le due grandezze;
- descriva una procedura di laboratorio per misurare ognuna delle due grandezze fisiche;
- tratti il concetto di potenza associato ad una corrente elettrica e ricavi l'espressione della potenza dissipata in una resistenza;
- calcoli la resistenza interna della pila in condizioni di cortocircuito, trascurando la resistenza del filo di collegamento;
- calcoli la potenza dissipata sulle due lampadine quando vengono collegate, separatamente, alla pila;
- calcoli, in percentuale, il rendimento delle due lampadine in rapporto alla loro reale capacità di funzionamento e commenti il risultato indicando quale lampadina ha la luminosità più vicina al valore massimo possibile, in base alle sue caratteristiche, e spiegando il perché.

La soluzione

Tema 2

Forza elettromotrice e differenza di potenziale

Una pila, e in generale un generatore di tensione, forniscono energia ai portatori di carica che circolano nel circuito. Possiamo immaginare che in una pila, a circuito aperto, esista ai due morsetti una certa quantità di carica statica non bilanciata, di segno opposto. Una distribuzione di cariche di questo tipo possiede evidentemente una energia potenziale elettrica, dato che è possibile accelerare i portatori di carica permettendo loro di raggiungere le cariche di segno opposto. Quando si chiude il circuito avviene appunto questo. I portatori di carica (in un circuito con conduttori metallici, come supporremo nel seguito, si tratta di elettroni) si muovono lungo il circuito sotto l'azione del campo elettrico generato dalla distribuzione di cariche: così facendo trasformano energia potenziale in energia cinetica, la quale viene poi trasformata in energia interna dei conduttori negli urti disordinati fra gli elettroni e il reticolo cristallino. L'esistenza nel circuito di una corrente continua attesta il fatto che nuova energia viene continuamente fornita ai portatori di carica.

L'energia viene fornita naturalmente dal generatore, il quale costringe gli elettroni a muoversi dal morsetto positivo a quello negativo *contro* il campo elettrico, fornendo così loro energia potenziale e permettendo il mantenimento della corrente. Con una metafora ben nota, possiamo paragonare il generatore a un montacarichi che solleva degli oggetti pesanti *contro* la forza peso, fornendo loro un'energia potenziale gravitazionale. Sia il montacarichi che il generatore compiono un lavoro, rispettivamente sugli oggetti pesanti e sugli elettroni, ed è proprio questo lavoro che si traduce in energia potenziale. Come nel montacarichi le forze che compiono lavoro *non* sono, in generale, di natura gravitazionale, nel generatore le forze che compiono lavoro sugli elettroni portandoli dal morsetto positivo a quello negativo *non* sono in generale di natura elettrica.

La quantità di lavoro eseguita dal generatore dipende dall'intensità di corrente presente nel circuito, ma il lavoro che il generatore è in grado di compiere sul singolo portatore di carica è una caratteristica intrinseca del generatore. Introduciamo pertanto una grandezza fisica definita come il rapporto fra il lavoro eseguito dal generatore sui portatori di carica *all'interno del generatore* e la carica complessiva che circola in esso:

$$F_{em} = \frac{W}{Q}. \tag{1}$$

Questa quantità ha, per ragioni storiche, il nome di *forza elettromotrice*. Si tratta di una denominazione infelice, perché come abbiamo visto la $f.e.m.$ non è affatto una forza, ma piuttosto un *lavoro specifico*. Possiamo osservare, inoltre, che le dimensioni fisiche della $f.e.m.$ sono quelle di un'energia divisa per una carica, ovvero di una differenza di potenziale, per cui l'unità di misura della $f.e.m.$ è il volt.

Quando il circuito viene chiuso collegando con dei conduttori i morsetti del generatore, fra tali morsetti è presente una differenza di potenziale ΔV_0. Questa differenza di potenziale, in generale, non è uguale alla $f.e.m.$ del generatore. Il prodotto $Q\Delta V_0$ rappresenta l'energia a disposizione dei portatori di carica per attraversare i conduttori esterni al generatore, mentre il prodotto QF_{em} rappresenta l'energia messa a disposizione dal generatore *complessivamente*, e in parte utilizzata dai portatori di carica per attraversare il generatore stesso. Più grande è l'intensità della corrente nel circuito, maggiore è l'energia necessaria ad attraversare il generatore e maggiore è quindi la *differenza* fra F_{em} e ΔV_0. In un circuito dove è stabilita una corrente intensa la differenza di potenziale ai capi del generatore risulta sensibilmente diversa, dunque molto minore, del suo valore nominale, pari alla forza elettromotrice.

Possiamo descrivere questa situazione introducendo un modello del generatore, costituito da una scatola nera *impossibile da aprire*, al cui interno si trovano un generatore ideale e una resistenza, detta *resistenza interna*, posta in serie ad esso. Il generatore ideale fornisce ai *suoi* estremi una differenza di potenziale uguale alla F_{em} e costante, qualunque sia il valore dell'intensità di corrente che scorre nel circuito. Tali estremi, però, non sono accessibili. La differenza di potenziale effettivamente disponibile ai capi della scatola nera risulta minore della F_{em} per una quantità uguale alla caduta di tensione ohmica sulla resistenza interna. In base al modello appena descritto, possiamo scrivere una semplice relazione fra la F_{em} di un generatore e la differenza di potenziale ΔV_0 presente ai suoi capi quando nel circuito è stabilita una corrente di intensità I:

$$\Delta V_0 = F_{em} - rI \tag{2}$$

dove r rappresenta la resistenza interna del generatore. Occorre ricordare, comunque, che la resistenza interna non corrisponde ad alcun resistore reale che sia presente "dentro" il generatore.

Misura della forza elettromotrice di un generatore

Dalla discussione precedente possiamo concludere che la differenza tra la F_{em} di un generatore e la differenza di potenziale ai suoi capi risulta tanto più piccola quanto minore è l'intensità della corrente nel circuito in cui è presente il generatore. Da questo punto di vista, la forza elettromotrice può in effetti essere definita come la differenza di potenziale ai capi del generatore *a circuito aperto*. Questa definizione, però, non può essere applicata alla lettera per misurare la F_{em}: la misura della differenza di potenziale ai capi di un elemento richiede, infatti, di porre in parallelo ad esso un voltmetro; ma ponendo in parallelo al generatore un voltmetro si chiude appunto il circuito e nel voltmetro si stabilisce una corrente (è questa corrente che fa sì che la bobina interna al voltmetro subisca una forza da parte del magnete che l'avvolge e quindi ruoti, spostando l'ago che fornisce appunto la misura del voltmetro).

Comunque, se la corrente erogata è molto bassa, la caduta di tensione *interna al generatore* che compare nella (2) è trascurabile rispetto a ΔV_0. Adottiamo perciò la soluzione di chiudere il generatore su un resistore di resistenza R_{ext} molto elevata e di misurare la differenza di potenziale ai capi del resistore. Se $R_{ext} \gg r$, la (2) si può scrivere come

$$F_{em} = \Delta V_0 + rI = R_{ext} I + rI \simeq R_{ext} I. \tag{3}$$

Potenza elettrica

Come abbiamo già ricordato, per stabilire una corrente elettrica in un conduttore è necessario fornire ai portatori di carica un'energia pari a quella che essi perdono negli urti con il reticolo cristallino del conduttore. Per questo motivo, in effetti, ai capi del conduttore si osserva una *caduta di tensione*: la differenza fra il potenziale elettrico al quale si trovano i portatori di carica all'ingresso del conduttore e il potenziale elettrico al quale essi si trovano all'uscita del conduttore misura appunto il rapporto fra l'energia ΔE persa dai portatori di carica e la carica Q da essi trasportata:

$$\Delta V = \frac{\Delta E}{Q}. \tag{4}$$

In un intervallo di tempo Δt nel conduttore scorre una quantità di carica data da:

$$Q = I\,\Delta t. \tag{5}$$

Confrontando la (4) e la (5) possiamo concludere che l'energia dissipata dai portatori di carica nel conduttore è:

$$\Delta E = Q\,\Delta V = I\,\Delta t\,\Delta V. \tag{6}$$

Questa quantità dipende dall'intervallo di tempo considerato. Introduciamo allora il concetto di *potenza dissipata sul conduttore*, definita come il rapporto fra l'energia dissipata e l'intervallo di tempo in cui ciò avviene. Tale grandezza, il cui valore corrisponde all'energia consumata nell'unità di tempo, risulta indipendente dal tempo:

$$P = \frac{\Delta E}{\Delta t} = I\,\Delta V. \tag{7}$$

Dobbiamo chiederci che effetti produce questo trasferimento di energia dalla corrente al conduttore. Come abbiamo detto, l'energia è trasferita attraverso urti che avvengono a livello microscopico. L'energia acquistata dal conduttore è quindi un'energia interna, che si manifesta attraverso un *aumento di temperatura* del conduttore stesso. Per effetto della corrente che è presente in esso, il conduttore *si scalda*.

Nel caso di un conduttore ohmico di resistenza R, vale per definizione la legge di Ohm:

$$\Delta V = RI \tag{8}$$

e la (7) prende la forma:

$$P = RI^2 = \frac{(\Delta V)^2}{R}. \tag{9}$$

Facciamo notare, comunque, che in generale la resistenza che compare in queste espressioni dipende dalla temperatura del conduttore. In un conduttore metallico, ad esempio, la resistenza aumenta con la temperatura. Di conseguenza, nell'applicare le relazioni così ricavate, non si può dare per scontato che R sia semplicemente una costante.

Resistenza interna

Dalla (2) si ricava che, se il generatore viene cortocircuitato mediante un conduttore esterno di resistenza trascurabile rispetto alla resistenza interna, praticamente tutta la tensione cade sulla resistenza interna stessa. In tal caso, infatti, la caduta di tensione sul conduttore esterno può essere trascurata (un voltmetro posto ai suoi capi indicherebbe una tensione praticamente nulla) e si ha

$$F_{em} = r I_{cc}.$$

Se la F_{em} è nota e se la corrente di corto circuito I_{cc} può essere determinata con un amperometro di resistenza interna trascurabile, possiamo misurare in questo modo la resistenza interna. Nel caso proposto dal testo:

$$r = \frac{F_{em}}{I_{cc}} = \frac{4{,}5\,\mathrm{V}}{6\,\mathrm{A}} = 0{,}75\,\Omega. \tag{10}$$

Potenza dissipata sulle lampadine

Se una lampadina riporta l'indicazione di una potenza P e di una differenza di potenziale ΔV, ciò indica che quando ai suoi capi è presente tale differenza di potenziale, la potenza dissipata dalla lampadina è P. In base alla (9), ciò comporta che in queste condizioni la lampadina presenti una resistenza:

$$R = \frac{(\Delta V)^2}{P} \tag{11}$$

per cui alle lampadine del testo dobbiamo assegnare una resistenza, *in condizioni di massima tensione applicata*, pari a:

$$\begin{aligned} R_A &= \frac{(\Delta V)^2}{P_A} = \frac{(4{,}5\,\mathrm{V})^2}{3\,\mathrm{W}} = 6{,}8\,\Omega \\ R_B &= \frac{(\Delta V)^2}{P_B} = \frac{(4{,}5\,\mathrm{V})^2}{5\,\mathrm{W}} = 4{,}1\,\Omega. \end{aligned}$$

Dobbiamo notare che, in condizioni differenti da quelle descritte, la temperatura del filamento delle lampadine sarà in generale diversa e il valore della resistenza varierà anch'esso. Il testo non contiene nessun accenno a questo aspetto, ma esso non può essere semplicemente trascurato. Anche se è vero che non si può dare una risposta alla richiesta del testo senza ipotizzare che R_A e R_B rimangano costanti, questa ipotesi dovrebbe essere esplicitata.

Ciò premesso, osserviamo che, *se le ipotesi fatte sono valide*, la corrente in ciascuna lampadina può essere ricavata dalla (3):

$$\begin{aligned} I_A &= \frac{F_{em}}{R_A + r} = \frac{4{,}5\,\mathrm{V}}{6{,}8\,\Omega + 0{,}75\,\Omega} = 0{,}59\,\mathrm{A} \\ I_B &= \frac{F_{em}}{R_B + r} = \frac{4{,}5\,\mathrm{V}}{4{,}1\,\Omega + 0{,}75\,\Omega} = 0{,}93\,\mathrm{A} \end{aligned}$$

ottenendo infine i seguenti valori della potenza dissipata:

$$\begin{aligned} P_{diss\,A} &= R_A\,(I_A)^2 = 6{,}8\,\Omega \cdot (0{,}59\,\mathrm{A})^2 = 2{,}4\,\mathrm{W} \\ P_{diss\,B} &= R_B\,(I_B)^2 = 4{,}1\,\Omega \cdot (0{,}93\,\mathrm{A})^2 = 3{,}5\,\mathrm{W}. \end{aligned}$$

Rendimento delle lampadine

L'uso del termine "rendimento" in questo contesto è purtroppo marcatamente gergale. Il rendimento è definito in generale come il rapporto fra energia utile sviluppata ed energia totale impiegata. Questo concetto non è qui applicabile. Il testo permette, con un certo sforzo, di concludere che l'estensore richiede il calcolo del rapporto fra la potenza effettivamente sviluppata da ciascuna lampadina e la sua potenza massima. Non si tratta certo di un rendimento nel senso termodinamico del termine. In questa accezione, la lampadina A ha un rendimento

$$\frac{P_{diss\,A}}{P_A} = \frac{2{,}4\,\mathrm{W}}{3\,\mathrm{W}} = 0{,}80 = 80\%$$

e la lampadina B ha un rendimento

$$\frac{P_{diss\,B}}{P_B} = \frac{3{,}5\,\mathrm{W}}{5\,\mathrm{W}} = 0{,}70 = 70\%.$$

Poiché la lampadina A lavora in condizioni più vicine a quelle di massima potenza sviluppata, questa lampadina apparirà più luminosa quando verrà collegata alla pila nel modo discusso.