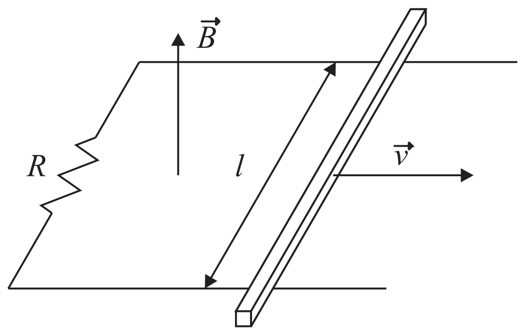
ESAME DI STATO
DI LICEO SCIENTIFICO
1997
Indirizzo
Scientifico Sperimentale

La prova

Tema 1

Una sbarretta conduttrice scorre su due guide metalliche parallele appoggiate sopra un piano orizzontale. Esse distano tra di loro $l = 20\,\text{cm}$ e sono collegate da un conduttore di resistenza $R = 2\,\Omega$. Sapendo che la sbarretta si muove in un campo magnetico con $\vec{B}$ di intensità 0,5 T, perpendicolare al piano ed orientato come in figura, calcolare:



- la d.d.p. indotta agli estremi della sbarretta in mV,
- l'intensità di corrente in mA che l'attraversa,
- la forza di attrito, sapendo che la sbarretta si muove con velocità costante $v = 20\,\text{cm/s}$.

Il candidato presenti la risoluzione sotto forma di relazione scientifica, descrivendo e motivando i passaggi intermedi.

La soluzione

Tema 1

Nella situazione descritta dal testo, il flusso Φ del campo magnetico $\vec{B}$, attraverso una qualsiasi superficie avente il circuito come bordo, varia nel tempo. In base alla legge di Faraday-Neumann-Lenz, nel circuito si stabilisce allora una *forza elettromotrice indotta* ε_{ind}, la quale produce a sua volta una corrente indotta i_{ind} nel circuito. Il verso della corrente indotta è tale da generare un secondo campo magnetico B' tale da opporsi alla variazione del flusso Φ.

La legge di Faraday-Neumann-Lenz può essere scritta in forma matematica come:

$$\varepsilon_{ind} = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}. \tag{1}$$

Poiché il campo magnetico $\vec{B}$ attraverso il circuito è uniforme e costante nel tempo, la variazione $\Delta\Phi$ del flusso relativo in un intervallo di tempo Δt è dovuta soltanto alla variazione ΔS dell'area sulla quale si calcola il flusso. Se come area su cui si calcola il flusso viene scelta, come è naturale, l'area del rettangolo delimitato dal resistore di resistenza R, dalla sbarretta e dalle guide metalliche, nell'intervallo Δt quest'area varia, per effetto del moto della sbarretta, di una quantità uguale al rettangolo spazzato dalla sbarretta in movimento. Tale rettangolo ha dimensioni pari rispettivamente a l e $\Delta s = v \cdot \Delta t$, per cui:

$$\Delta S = l \cdot v \cdot \Delta t. \tag{2}$$

La variazione del flusso di $\vec{B}$ risulta pertanto uguale al flusso attraverso ΔS; ricordando che $\vec{B}$ è uniforme e perpendicolare alla superficie del circuito, e utilizzando la (2):

$$\Delta\Phi = \vec{B} \circ \Delta\vec{S} = B \cdot \Delta S = B \cdot l \cdot v \cdot \Delta t. \tag{3}$$

Sostituendo la (3) nella (1), otteniamo la seguente espressione della forza elettromotrice indotta:

$$\varepsilon_{ind} = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -B \cdot l \cdot v = -0{,}5\,\mathrm{T} \cdot 0{,}20\,\mathrm{m} \cdot 0{,}20\,\mathrm{m/s} = -20\,\mathrm{mV}. \tag{4}$$

Il segno meno di questo risultato va inteso in questo senso: guardando il circuito dalla direzione individuata dal vettore $\vec{B}$, la forza elettromotrice indotta genera una corrente che scorre nel circuito in senso negativo, cioè in senso *orario*. In base alla prima regola della mano destra, è facile rendersi conto che tale corrente indotta genera a sua volta un campo magnetico $\vec{B}'$ diretto come $\vec{B}$ ma avente verso opposto. Tale nuovo campo magnetico agisce quindi in modo da *diminuire* il flusso totale attraverso la superficie del circuito, opponendosi all'*aumento* del flusso dovuto al moto della sbarretta. Questo è proprio ciò che prevede la legge di Lenz.

L'intensità della corrente indotta i_{ind} può essere determinata supponendo (come è ragionevole in base al testo) che la resistenza del tratto R sia molto maggiore di quella offerta dal resto del circuito. Possiamo allora supporre che la forza elettromotrice sia praticamente uguale alla caduta di tensione ai capi del resistore, data a sua volta dalla legge di Ohm:

$$\varepsilon_{ind} = R \cdot i_{ind}. \tag{5}$$

Richiamando la (4) e risolvendo la (5) in funzione di i_{ind} giungiamo finalmente al valore:

$$i_{ind} = \frac{\varepsilon_{ind}}{R} = \frac{20\,\mathrm{mV}}{2\,\Omega} = 10\,\mathrm{mA} \tag{6}$$

dove abbiamo ignorato il segno meno che compare nella (4), poiché siamo interessati esclusivamente alle intensità. Il segno avrebbe comunque un significato analogo a quello già discusso: percorrendo il circuito in senso *antiorario*, incontriamo prima il capo del resistore a potenziale più basso.

Sempre ignorando la caduta di tensione nei tratti di guida metallica che chiudono il circuito, la d.d.p. ai capi della sbarretta deve essere uguale alla caduta di tensione ai capi di R, pari dunque a 20 mV.

Questo risultato merita una discussione più approfondita. Possiamo chiederci qual è l'origine della forza elettromotrice che si stabilisce sul circuito. Osserviamo allora che gli elettroni di conduzione presenti nella sbarretta sono in moto rispetto al campo magnetico esterno $\vec{B}$. Di conseguenza, essi sono soggetti a una forza di Lorentz, data dalla legge:

$$\vec{F} = q \cdot \vec{v} \times \vec{B}, \tag{7}$$

che imprime loro un moto longitudinale alla sbarretta. In questo modo gli elettroni si spostano verso un estremo della sbarretta, così che ai capi di questa viene a stabilirsi la differenza di potenziale da noi determinata. Si potrebbe concludere che sia la forza di Lorentz a compiere lavoro sugli elettroni e in ultima analisi a generare la forza elettromotrice (che è definita, lo ricordiamo, come il rapporto fra il lavoro eseguito sulle cariche e il valore delle cariche stesse). In realtà la faccenda è più complicata, in quanto la forza di Lorentz (7) è ad ogni istante perpendicolare al moto degli elettroni e quindi non può compiere lavoro su di essi. Per un'analisi completa della situazione, sarebbe indispensabile prendere in considerazione le forze di natura elettrica esercitate dal reticolo cristallino sugli elettroni.

Questo non è in definitiva necessario. A compiere davvero lavoro sul sistema è naturalmente la forza esterna $\vec{F}_{ext}$ che tiene in movimento la sbarretta. È questa forza che fornisce l'energia necessaria a far muovere gli elettroni nel circuito, energia che viene loro continuamente sottratta per effetto Joule e quindi, in ultima analisi, per i processi che tendono a far aumentare la temperatura del circuito e in particolare del resistore.

L'effetto Joule può essere quantificato mediante la potenza dissipata al passaggio della corrente attraverso il resistore:

$$P = \Delta V \cdot i. \tag{8}$$

La potenza P deve essere fornita dal lavoro eseguito dalla forza esterna $\vec{F}_{ext}$ sul centro di massa della sbarretta, che si muove alla velocità $\vec{v}$ e in un intervallo Δt esegue uno spostamento $\Delta\vec{s} = \vec{v} \cdot \Delta t$. Poiché la potenza fornita è definita dal rapporto fra il lavoro W eseguito e l'intervallo di tempo impiegato, otteniamo:

$$P = \frac{W}{\Delta t} = \frac{\vec{F}_{ext} \circ \Delta\vec{s}}{\Delta t} = \frac{\vec{F}_{ext} \circ \vec{v} \cdot \Delta t}{\Delta t} = F_{ext} \cdot v. \tag{9}$$

Uguagliando la (8) e la (9) e risolvendo in funzione di F_{ext} otteniamo:

$$F_{ext} = \frac{\Delta V \cdot i}{v} = \frac{20\,\mathrm{mV} \cdot 10\,\mathrm{mA}}{0{,}20\,\mathrm{m/s}} = 1{,}0\,\mathrm{mN}. \tag{10}$$

Il testo del problema richiede il calcolo della forza di attrito sulla sbarretta. Non è chiaro quale sia in questo caso l'intenzione dell'estensore della prova. Naturalmente, dato che la sbarretta si muove di moto rettilineo uniforme, la forza totale su di essa deve essere zero. Pertanto, sulla sbarretta deve agire una "forza di attrito" uguale alla forza esterna motrice. Ma qual è la natura fisica di questa forza? Possiamo prendere in considerazione due eventualità:

1. per "forza di attrito" si intende la sola forza $i \cdot \vec{l} \times \vec{B}$ che il campo magnetico imprime sulla sbarretta quando in essa si stabilisce una corrente: per la regola della mano destra, questa forza magnetica si oppone al moto della sbarretta e quindi si oppone alla forza motrice $\vec{F}_{ext}$, comportandosi come una forza resistente o di attrito;

2. oltre a questa forza resistente di origine magnetica, deve intendersi presente anche una forza di attrito meccanico fra la sbarretta e le guide metalliche su cui scivola; se è presente questa seconda forza di attrito, deve essere presente un ulteriore forza motrice esterna che la equilibri.

Nell'ipotesi 1. la forza di attrito è uguale e opposta alla forza motrice esterna che sostiene la forza elettromotrice indotta. Abbiamo già quantificato tale forza in 1,0 mN, quindi la forza di attrito vale anch'essa 1,0 mN. Nell'ipotesi 2. il problema è indeterminato. Siamo in grado di determinare la forza esterna necessaria a fornire lavoro elettrico al sistema, ma non sappiamo come determinare la forza necessaria a fornire l'energia cinetica consumata dalla forza di attrito meccanico. In assenza di una "interpretazione autentica", non possiamo andare oltre queste osservazioni, né avrebbe potuto farlo il candidato.