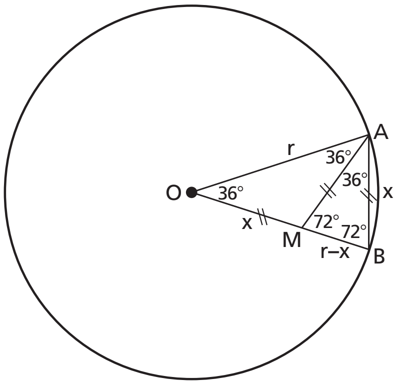
ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. • 2005

1 Si dimostri che il lato del decagono regolare inscritto in un cerchio è sezione aurea del raggio e si utilizzi il risultato per calcolare sen18°, sen36°.

1 Consideriamo il triangolo OAB, in cui O è il centro della circonferenza circoscritta al decagono e AB un suo lato. $A\hat{O}B = 36°$ perché è un decimo dell'angolo giro. Essendo poi il triangolo isoscele si ha che $O\hat{A}B = O\hat{B}A = 72°$. Tracciamo ora la bisettrice di $O\hat{A}B$, che interseca il lato OB in M. Si ha che sia il triangolo OMA che il triangolo AMB sono isosceli, quindi $OM = AB$. Indicato con r il raggio della circonferenza e con x il lato del decagono, per il teorema della bisettrice si ha che,

$$\frac{x}{r} = \frac{(r - x)}{x}$$

L'uguaglianza scritta è equivalente a $r : x = x : (r - x)$, quindi x è la misura della sezione aurea del segmento di misura r.



▲ **Figura 3.**

Risolvendo rispetto a x e scartando la soluzione negativa si ottiene $x = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} r$.

Tracciamo l'asse di AB. Detto P il punto medio di AB si ha che $OA \cdot \operatorname{sen} 18° = AP$, quindi $\operatorname{sen} 18° = AP/OA = \frac{x/2}{r} = \frac{(-1 + \sqrt{5})}{4}$. Per calcolare $\operatorname{sen} 36°$ si può ricorrere alla formula $\operatorname{sen} 2a = 2 \operatorname{sen} a \cos a = 2 \operatorname{sen} a \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 a}$ perché in questo caso $0° < a < 90°$. Sostituendo si ha

$$\operatorname{sen} 36° = 2\frac{(\sqrt{5} - 1)}{4}\sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{4}\right)^2} = \frac{1}{8}(\sqrt{5} - 1)\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} = \frac{1}{4}\sqrt{10 - 4\sqrt{5}}.$$