

ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO CORSO DI ORDINAMENTO • 2007

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.

PROBLEMA 2

Si consideri un cerchio C di raggio r .

1. Tra i triangoli isosceli inscritti in C si trovi quello di area massima.
2. Si denoti con S_n l'area del poligono regolare di n lati inscritto in C . Si dimostri che $S_n = \frac{n}{2} r^2 \sin \frac{2\pi}{n}$ e si trovi un'analoga espressione per l'area del poligono regolare di n lati circoscritto a C .
3. Si calcoli il limite di S_n per $n \rightarrow \infty$.
4. Si spieghi in che cosa consista il problema della quadratura del cerchio e se, e in che senso, si tratti di un problema risolubile o meno.

SOLUZIONE DELLA PROVA D'ESAME CORSO DI ORDINAMENTO • 2007

PROBLEMA 2

1. Consideriamo il triangolo isoscele ABC inscritto nella circonferenza C , con $\overline{AC} = \overline{BC}$. Sia $x = \widehat{ACH}$, come in figura 9.

Ne segue che $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

Per il teorema della corda, $\overline{AB} = 2r \sin(2x)$.

Possiamo supporre $\overline{CH} > \overline{CO}$. Infatti, se fosse $H \in CO$ (figura 10), esisterebbe un triangolo isoscele inscritto con base $A'B' = AB$ e altezza $\overline{CH'} > \overline{CH}$, quindi di area maggiore. Ne segue che i triangoli isosceli con altezza minore del raggio non sono di area massima.

Ora, poiché $\overline{OC} = \overline{OA} = r$, si ha che $\widehat{ACO} = \widehat{CAO} = x$, quindi $\widehat{AOH} = 2x$. Ne segue che $\overline{OH} = r \cos(2x)$, perciò $\overline{CH} = r + r \cos(2x)$. La funzione che descrive l'area del triangolo ABC è, perciò,

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\overline{AB} \cdot \overline{CH}}{2} = r \sin(2x) \cdot [r + r \cos(2x)] = \\ &= r^2 [\sin(2x) + \cos(2x) \sin(2x)]. \end{aligned}$$

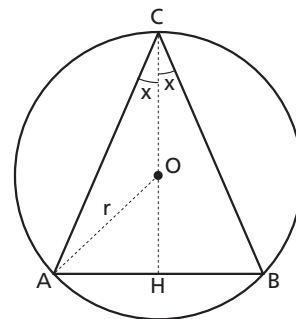
Studiamone la derivata nell'intervallo $\left] 0; \frac{\pi}{2} \right[$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= r^2 [2 \cos(2x) - 2 \sin^2(2x) + 2 \cos^2(2x)] = \\ &= 2r^2 [2 \cos^2(2x) + \cos(2x) - 1]. \end{aligned}$$

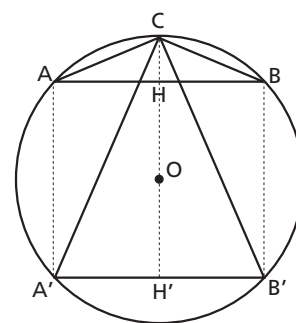
Essa è non negativa se $\cos(2x) \leq -1$ oppure $\cos(2x) \geq \frac{1}{2}$. La prima disequazione è impossibile nel dominio, mentre la seconda è verificata per $0 < 2x \leq \frac{\pi}{3}$, cioè per $0 < x \leq \frac{\pi}{6}$.

Riportiamo l'andamento nella figura 11.

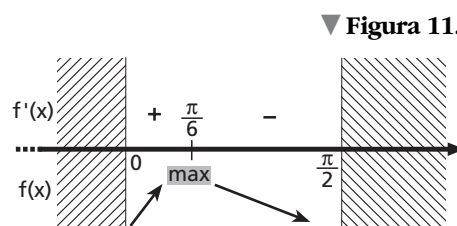
L'area massima si ottiene, quindi, per $x = \frac{\pi}{6}$, che corrisponde a un triangolo equilatero.



▲ Figura 9.

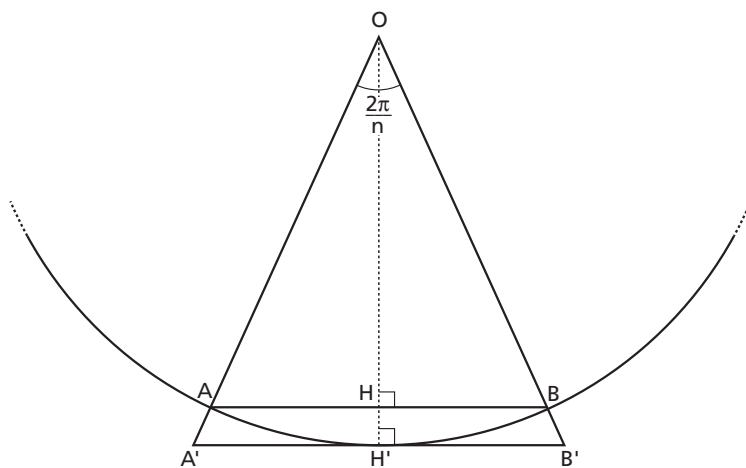


▲ Figura 10.



▼ Figura 11.

2. Un poligono regolare di n lati inscritto si può scomporre in n triangoli isosceli congruenti con vertice in comune nel centro del cerchio. Essi hanno angolo al vertice di ampiezza $\frac{2\pi}{n}$ e lato r . Sia ABO un triangolo siffatto, come in figura 12.



◀ Figura 12.

Per il teorema della corda si ha che $AB = 2r \sin \frac{\pi}{n}$. Per il teorema di Pitagora si ha:

$$OH = \sqrt{r^2 - r^2 \sin^2 \frac{\pi}{n}} = r \cos \frac{\pi}{n}.$$

L'area del poligono inscritto cercata è quindi:

$$S_n = n \cdot A_{AOB} = n \cdot \frac{\overline{AB} \cdot \overline{OH}}{2} = nr^2 \sin \frac{\pi}{n} \cdot \cos \frac{\pi}{n} = \frac{n}{2} r^2 \sin \frac{2\pi}{n}.$$

Analogamente, per il poligono regolare di n lati circoscritto, consideriamo il triangolo $OA'B'$ della precedente figura. Tale triangolo ha r come altezza e angolo al vertice $\frac{2\pi}{n}$. Ne segue che $\overline{H'B'} = r \tan \frac{\pi}{n}$ e, quindi, l'area del poligono vale:

$$A_n = n \cdot A_{AO'B'} = n \cdot r^2 \tan \frac{\pi}{n}.$$

3. $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2} r^2 \sin \frac{2\pi}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \pi r^2 \frac{\sin \frac{2\pi}{n}}{\frac{2\pi}{n}} = \pi r^2$. Nell'ultimo passaggio si è effettuato il cambio di variabile $t = \frac{2\pi}{n}$ e si è ricordato che $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$.

4. Il problema della quadratura del cerchio consiste nel costruire un quadrato di area pari a quella di un cerchio di raggio assegnato con riga e compasso. Dal punto di vista algebrico, indicati con r il raggio del cerchio e con l il lato del quadrato da trovare, vale la relazione:

$$\pi r^2 = l^2 \quad \rightarrow \quad l = \sqrt{\pi} \cdot r.$$

Assunto per semplicità $r = 1$, si tratta di costruire un lato di misura $\sqrt{\pi}$. Nel 1882 venne dimostrata l'impossibilità di tale costruzione attraverso le regole euclidee equivalenti all'uso di riga e compasso.