ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO DI ORDINAMENTO • 2008

PROBLEMA 2

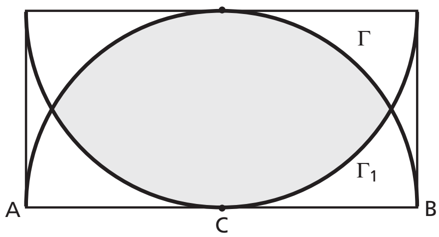
Assegnato nel piano il semicerchio Γ di centro C e diametro $AB = 2$ (figura 2), si affrontino le seguenti questioni.

a) Si disegni nello stesso semipiano di Γ un secondo semicerchio Γ_1 tangente ad AB in C e di uguale raggio 1. Si calcoli l'area dell'insieme piano intersezione dei due semicerchi Γ e Γ_1.

b) Si trovi il rettangolo di area massima inscritto in Γ.

c) Sia P un punto della semicirconferenza di Γ, H la sua proiezione ortogonale su AB. Si ponga $P\hat{C}B = x$ e si esprimano in funzione di x le aree S_1 e S_2 dei triangoli APH e PCH.

Si calcoli il rapporto $f(x) = \dfrac{S_1(x)}{S_2(x)}$.



▲ **Figura 2.**

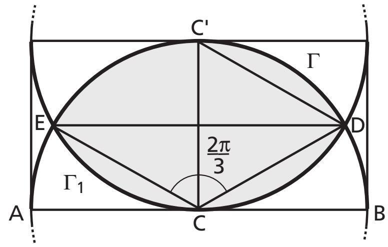
d) Si studi $f(x)$ e se ne disegni il grafico prescindendo dai limiti geometrici del problema.

PROBLEMA 2

a) Indicate con E e D le intersezioni delle semicirconferenze corrispondenti ai due semicerchi, congiungiamo i punti E con D e C con C'. Consideriamo i lati del triangolo CDC' i cui vertici sono i centri C e C' dei due semicerchi Γ e Γ_1 e uno dei due punti di intersezione tra di essi (figura 7). Risulta:

$\overline{CD} = 1$ perché D appartiene a Γ,
$\overline{C'D} = 1$, perché D appartiene a Γ_1,
$\overline{CC'} = 1$, per costruzione.

Il triangolo CDC' è pertanto equilatero e l'angolo $E\hat{C}D$ misura $\frac{2}{3}\pi$.



▲ **Figura 7.**

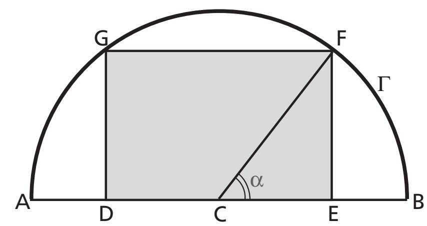
L'area dell'insieme piano intersezione dei due semicerchi risulta uguale al doppio della differenza tra l'area del settore circolare $E\hat{C}D$ e l'area del triangolo ECD:

$$\text{Area} = 2\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{2}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

b) Consideriamo il semicerchio Γ e assumiamo come incognita l'angolo $\alpha = E\hat{C}F$ (figura 8).

Le limitazioni affinché il rettangolo non sia degenere sono:

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}.$$



▲ **Figura 8.**

Dalla trigonometria risulta:

$$\overline{EF} = \overline{CF} \cdot \operatorname{sen}\alpha \rightarrow \overline{EF} = \operatorname{sen}\alpha,$$
$$\overline{DE} = 2 \cdot \overline{CE} = 2 \cdot \overline{CF} \cdot \cos\alpha \rightarrow \overline{DE} = 2\cos\alpha.$$

L'area del rettangolo $GDEF$ vale:

$$R(\alpha) = \overline{EF} \cdot \overline{DE} \rightarrow R(\alpha) = 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha = \operatorname{sen}2\alpha.$$

Studiamo la derivata prima e il suo segno:

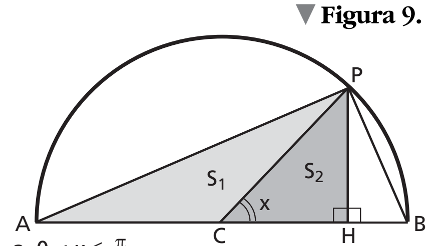
$$R'(\alpha) \geq 0 \text{ per } 0 < \alpha \leq \frac{\pi}{4}, \quad R'(\alpha) < 0 \text{ per } \frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}.$$

La funzione area $R(\alpha)$ assume valore massimo per $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

In tal caso l'area massima del rettangolo vale 1 e le corrispondenti dimensioni sono:

$$\overline{DE} = \sqrt{2} \quad \text{e} \quad \overline{EF} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

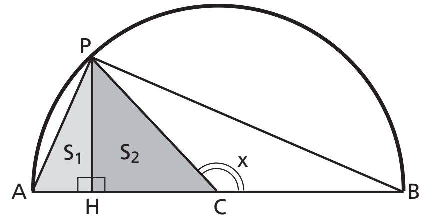
▼ **Figura 9.**



a. $0 < x \leq \frac{\pi}{2}$.

c) Se P è un punto della semicirconferenza di Γ, H la sua proiezione ortogonale su AB e $P\hat{C}B = x$, si osservano dalla figura 9 due possibili configurazioni a seconda della variabilità dell'angolo x. Nel primo caso l'angolo x è acuto o retto $\left(0 < x \leq \frac{\pi}{2}\right)$, mentre nel secondo caso è ottuso $\left(\frac{\pi}{2} < x < \pi\right)$.

Caso a: $0 < x \le \frac{\pi}{2}$



b. $\frac{\pi}{2} < x < \pi$.

Le misure dei lati dei triangoli *PCH* e *APH*, utili per determinare le aree, sono:

$PH = \operatorname{sen} x, \quad CH = \cos x, \quad AH = 1 + \cos x.$

Le funzioni area sono rispettivamente:

$$S_1(x) = \frac{1}{2}\operatorname{sen} x(1 + \cos x),\ S_2(x) = \frac{1}{2}\operatorname{sen} x \cos x.$$

La funzione rapporto $f(x)$ risulta:

$$f(x) = f_1(x) = \frac{S_1(x)}{S_2(x)} = \frac{1 + \cos x}{\cos x}.$$

Caso b: $\frac{\pi}{2} < x < \pi$

Le misure dei lati dei triangoli *PCH* e *APH*, utili per determinare le aree, sono:

$PH = \operatorname{sen}(\pi - x) = \operatorname{sen} x, \quad CH = \cos(\pi - x) = -\cos x, \quad AH = 1 + \cos x.$

Quindi le funzioni area sono rispettivamente:

$$S_1(x) = \frac{1}{2}\operatorname{sen} x(1 + \cos x), \qquad S_2(x) = \frac{1}{2}\operatorname{sen} x\,(-\cos x) = -\frac{1}{2}\operatorname{sen} x \cos x.$$

La funzione rapporto $f(x)$ risulta:

$$f(x) = f_2(x) = \frac{S_1(x)}{S_2(x)} = -\frac{1 + \cos x}{\cos x}.$$

d) Prescindendo dai limiti geometrici del problema risulta $f_1(x) = -f_2(x)$, ovvero le due funzioni sono simmetriche rispetto all'asse delle ascisse. Pertanto si conviene di studiare la funzione

$$f_1(x) = \frac{1 + \cos x}{\cos x} = \frac{1}{\cos x} + 1.$$

Tale funzione è periodica, di periodo 2π: ci limitiamo a studiarla nell'intervallo $[0; 2\pi]$ nel quale è definita per $x \neq \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi$.

La curva interseca gli assi cartesiani in $(0; 2)$ e $(\pi; 0)$; è positiva per $0 \le x < \frac{\pi}{2}$, $\frac{3}{2}\pi < x \le 2\pi$. I limiti nei punti di discontinuità valgono

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^{\pm}} \left(1 + \frac{1}{\cos x}\right) = \mp\infty,\ \lim_{x \to \frac{3}{2}\pi^{\pm}} \left(1 + \frac{1}{\cos x}\right) = \pm\infty,$$

pertanto la funzione ha asintoti verticali di equazioni $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \frac{3}{2}\pi$.

La derivata prima ha espressione e segno:

$$f'_1(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x},$$

$f'_1(x) > 0$ per $0 < x < \pi$,
$f'_1(x) < 0$ per $\pi < x < 2\pi$.

Essa si annulla per $x = 0$, $x = \pi$, $x = 2\pi$.
Pertanto la funzione ha un massimo relativo in $(\pi; 0)$ e minimi relativi in $(0; 2)$ e $(2\pi; 2)$.
Studiamo la concavità di $f_1(x)$, tramite il segno di f'' che ha espressione:

$$f''_1(x) = \frac{1 + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^3 x},$$

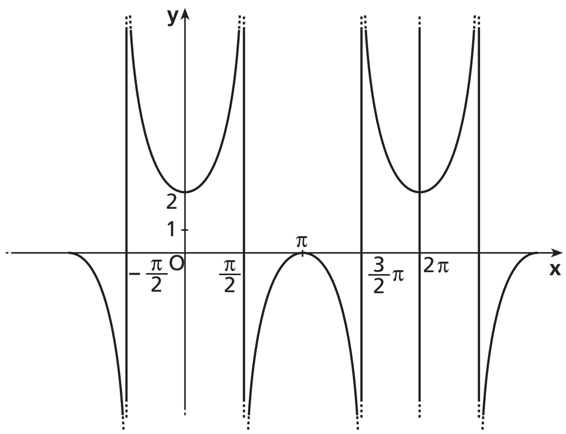
$$f''_1(x) > 0 \rightarrow \cos x > 0 \text{ per } 0 < x < \frac{\pi}{2} \vee$$

$$\vee \frac{3}{2}\pi < x < 2\pi,$$

$$f''_1(x) < 0 \text{ per } \frac{\pi}{2} < x < \frac{3}{2}\pi.$$

La funzione ha concavità verso l'alto per $0 < x < \frac{\pi}{2}$ e per $\frac{3}{2}\pi < x < 2\pi$, verso il basso per $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3}{2}\pi$.

Rappresentiamo in figura 10 il grafico di $f_1(x)$, tenendo conto della periodicità di 2π.



▲ **Figura 10.**