

SIMULAZIONE DI PROVA D'ESAME CORSO DI ORDINAMENTO

PROBLEMA 2

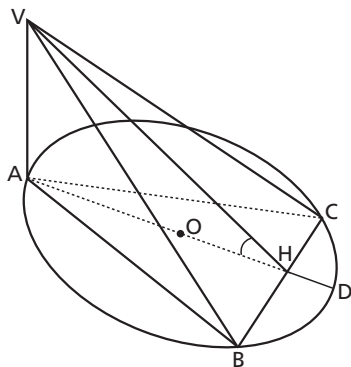
In una circonferenza di diametro $\overline{AD} = 2r$ è inscritto il triangolo isoscele ABC di base BC . Costruisci la piramide che ha per base il triangolo ABC e altezza il segmento AV congruente a BC .

1. Posto $\overline{AH} = x$, essendo H il punto medio del segmento BC , determina la funzione $y = f(x)$ che esprime il volume della piramide $ABCV$.
2. Disegna il grafico di f e determina per quale valore di x il volume della piramide è massimo.
3. In corrispondenza di tale valore determina l'angolo formato dalle facce ABC e VBC .
4. Se y_0 è il valore del volume massimo, calcola l'area della regione finita di piano appartenente al semipiano $x \geq 0$, delimitata dalla funzione f e dalla sua simmetrica rispetto alla retta di equazione $y = y_0$.

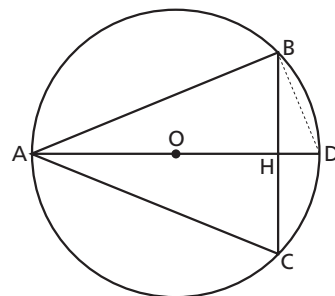
SOLUZIONE DELLA SIMULAZIONE D'ESAME CORSO DI ORDINAMENTO

PROBLEMA 2

1. Costruiamo la figura.



◀ Figura 2.



▲ Figura 3.

Il dominio geometrico della variabile $\overline{AH} = x$ è l'intervallo $0 \leq x \leq 2r$.

Scriviamo l'espressione del volume della piramide $ABCV$ tenendo conto che $\overline{AV} = \overline{BC} = 2\overline{BH}$:

$$V_p = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot \overline{AV} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \overline{BC} \cdot \overline{AH} \cdot \overline{AV} = \frac{1}{3} \cdot \overline{BH} \cdot \overline{AH} \cdot (2\overline{BH}) = \frac{2}{3} \cdot \overline{BH}^2 \cdot \overline{AH}.$$

Applichiamo il secondo teorema di Euclide al triangolo rettangolo ADB (inscritto in una semicirconferenza) per esprimere \overline{BH} in funzione di x :

$$\overline{BH}^2 = \overline{AH} \cdot \overline{HD}$$

$$\overline{AH} = x, \quad \overline{HD} = 2r - x \quad \rightarrow \quad \overline{BH}^2 = x(2r - x).$$

Ora scriviamo il volume della piramide in funzione di x :

$$V_p = f(x) = \frac{2}{3} x(2r - x)x = -\frac{2}{3} x^3 + \frac{4}{3} rx^2, \quad x \in [0; 2r].$$

2. Disegniamo il grafico eseguendo lo studio completo della funzione su tutto il suo campo di esistenza cioè $\forall x \in \mathbb{R}$.

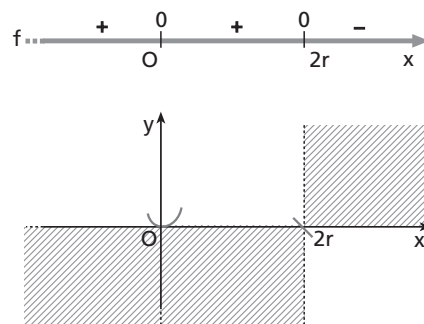
f è un polinomio di terzo grado quindi è continua e derivabile $\forall x \in \mathbb{R}$, non ha asintoti, ha un punto di flesso.

Segno e intersezioni con gli assi:

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{2}{3} x^2(2r - x) > 0, \quad x < 2r;$$

$$f(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{2}{3} x^2(2r - x) < 0, \quad x > 2r \wedge x \neq 0;$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \text{ (radice doppia) oppure } x = 2r.$$



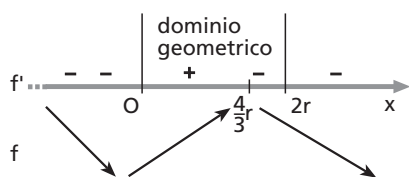
► Figura 4.

In $x = 2r$ la funzione interseca l'asse delle ascisse. In $x = 0$ la funzione è tangente all'asse delle ascisse perché ha una radice di molteplicità 2.

Derivata prima: crescenza e decrescenza, massimi e minimi.

$$f'(x) = -2x^2 + \frac{8}{3}rx \quad \text{dunque:}$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x < 0 \vee x > \frac{4}{3}r; \quad f'(x) > 0 \Leftrightarrow 0 < x < \frac{4}{3}r.$$



◀ Figura 5.

$O = (0; 0)$ è punto di minimo relativo;

$M = \left(\frac{4}{3}r; \frac{64}{81}r^3\right)$ è punto di massimo relativo.

Nell'intervallo $[0; 2r]$ la funzione, e quindi il volume della piramide, ha il massimo assoluto $y_0 = \frac{64}{81}r^3$ per $x_0 = \frac{4}{3}r$.

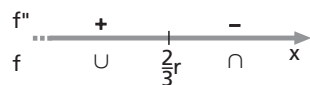
Completiamo lo studio con l'analisi della derivata seconda per la concavità e i flessi.

$$f''(x) = -4x + \frac{8}{3}r \quad \text{dunque:}$$

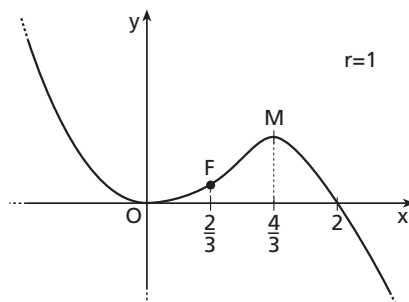
$$f''(x) < 0 \Leftrightarrow x > \frac{2}{3}r, \quad \text{concavità verso il basso;}$$

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow x < \frac{2}{3}r, \quad \text{concavità verso l'alto;}$$

$$F\left(\frac{2}{3}r; \frac{32}{81}r^3\right) \text{ punto di flesso.}$$



▲ Figura 6.



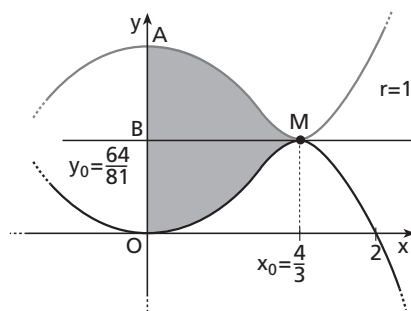
◀ Figura 7.

3. Le facce ABC e VBC formano un diedro convesso la cui sezione normale $V\hat{H}A$ è l'angolo richiesto. Determiniamo $V\hat{H}A$ mediante la sua tangente goniometrica:

$$\text{tg}(V\hat{H}A) = \frac{\overline{AV}}{\overline{AH}}.$$

Poiché $\overline{AH} = x_0 = \frac{4}{3}r$ e $\overline{AV} = 2\overline{BH} = 2\sqrt{x_0(2r - x_0)} = \frac{4\sqrt{2}}{3}r$ avremo:
 $\text{tg}(\widehat{VHA}) = \sqrt{2}$ ($\widehat{VHA} \approx 57,735\dots^\circ$).

4. Tracciamo il grafico sommario della funzione simmetrica di f rispetto alla retta $y = y_0 = \frac{64}{81}r^3$ senza ricavare la sua espressione analitica.



◀ Figura 8.

L'area da determinare, evidenziata con un fondino, è doppia dell'area della regione di piano delimitata dalla retta $y = y_0$, dall'asse delle ordinate e dalla funzione f . Pertanto:

$$S_{OMA} = 2S_{OMB} = 2 \int_0^{\frac{4}{3}r} (y_0 - f(x)) dx = 2 \int_0^{\frac{4}{3}r} \frac{64}{81} r^3 dx - 2 \int_0^{\frac{4}{3}r} \left(-\frac{2}{3}x^3 + \frac{4}{3}rx^2 \right) dx.$$

Calcoliamo i due integrali separatamente.

$$2 \int_0^{\frac{4}{3}r} \frac{64}{81} r^3 dx = \frac{128}{81} r^3 [x]_0^{\frac{4}{3}r} = \frac{512}{243} r^4.$$

$$2 \int_0^{\frac{4}{3}r} \left(-\frac{2}{3}x^3 + \frac{4}{3}rx^2 \right) dx = -\frac{4}{3} \left[\frac{1}{4}x^4 \right]_0^{\frac{4}{3}r} + \frac{8}{3}r \left[\frac{1}{3}x^3 \right]_0^{\frac{4}{3}r} = -\frac{256}{243} r^4 + \frac{512}{243} r^4 = \frac{256}{243} r^4.$$

Il valore dell'area è dunque:

$$S_{OMA} = \frac{512}{243} r^4 - \frac{256}{243} r^4 = \frac{256}{243} r^4.$$