

**ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO  
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. • 2005  
Sessione suppletiva**

■ **PROBLEMA 1**

Sono dati una piramide triangolare regolare e il prisma retto inscritto in essa in modo che una base sia la sezione della piramide con il piano equidistante dal suo vertice e dalla sua base.

A) Ammesso di conoscere il volume della piramide, dire se è possibile calcolare il volume del prisma e fornire una esauriente spiegazione della risposta.

B) Posto che lo spigolo della base  $ABC$  della piramide sia lungo 4 cm:

- 1) calcolare la misura dello spigolo della base  $MNP$  del prisma, complanare ad  $ABC$ ;
- 2) supposto che gli spigoli  $AB$  e  $MN$  siano paralleli, riferire il piano dei triangoli  $ABC$  e  $MNP$  a un sistema di assi cartesiani avente l'origine in  $A$  e l'asse delle ascisse coincidente con la retta  $AB$  e trovare le coordinate dei vertici di tali triangoli;
- 3) determinare quindi l'equazione della parabola avente l'asse perpendicolare alla retta  $AB$  e passante per i punti  $A$ ,  $B$ ,  $M$  e verificare che passa pure per  $N$ ;
- 4) dopo aver spiegato perché la trasformazione che muta il triangolo  $ABC$  nel triangolo  $MNP$  è una similitudine, trovarne le equazioni;
- 5) spiegare esaurientemente, col metodo preferito, com'è posizionata la circonferenza circoscritta al triangolo  $MNP$  rispetto al triangolo  $ABC$ .

**SOLUZIONE DELLA PROVA D'ESAME**  
**CORSO SPERIMENTALE P.N.I. • 2005**  
**Sessione suppletiva**

**PROBLEMA 1**

**A)** Nella figura 1 sono disegnati la piramide triangolare regolare, di base  $ABC$  equilatera e altezza  $VH$ , e il prisma triangolare inscritto nella piramide, di base  $DEF$  equilatera e altezza  $KH = \frac{1}{2} VH$ .

La piramide triangolare di vertice  $V$  e base  $DEF$  è simile alla piramide di base  $ABC$  e vertice  $V$ , con rapporto di similitudine  $k = \frac{1}{2}$  per ipotesi, pertanto i volumi delle due piramidi hanno

rapporto  $k^3 = \frac{1}{8}$ :

$$\text{Vol}_{DEFV} = \frac{1}{8} \text{Vol}_{ABCV}.$$

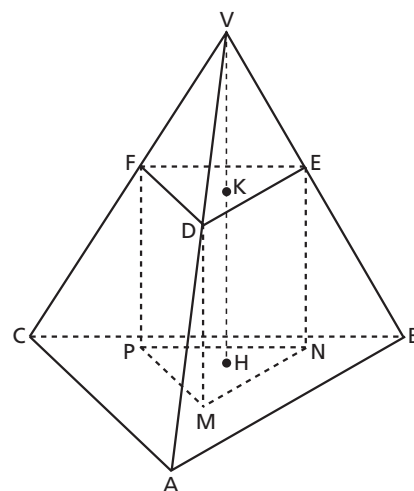
Ora, la piramide  $DEFV$  ha base e altezza congruenti al prisma inscritto di partenza: essa è quindi equivalente alla terza parte del prisma cioè  $\text{Vol}_{DEFV} = \frac{1}{3} \text{Vol}_{\text{prisma}}$ . Sostituendo nella relazione precedente si trova:

$$\frac{1}{3} \text{Vol}_{\text{prisma}} = \frac{1}{8} \text{Vol}_{ABCV} \rightarrow \text{Vol}_{\text{prisma}} = \frac{3}{8} \text{Vol}_{ABCV}.$$

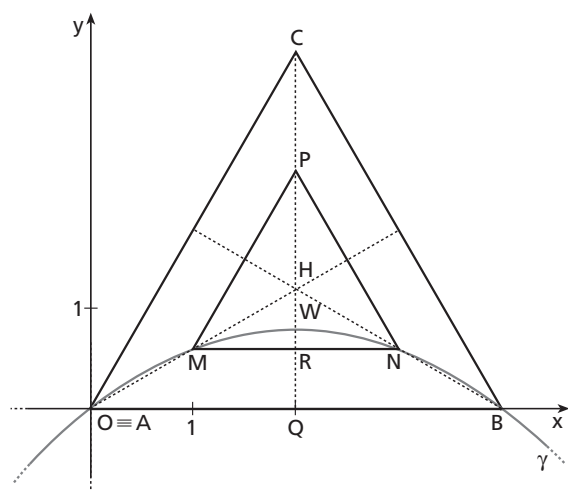
In conclusione, il volume del prisma inscritto è  $\frac{3}{8}$  del volume della piramide  $ABCV$ .

**B1)** Nel punto A) si è osservato che i triangoli equilateri  $MNP$  e  $ABC$  sono simili con rapporto di similitudine  $k = \frac{1}{2}$ . Se il lato di  $ABC$  misura 4 cm, il lato di  $MNP$  è lungo 2 cm.

**B2)** Nella figura 2 sono rappresentati i triangoli  $ABC$  e  $MNP$  nel sistema di assi cartesiani come richiesto.



▲ Figura 1.



◀ Figura 2.

I punti  $A$  e  $B$  hanno coordinate  $A(0; 0)$  e  $B(4; 0)$ ; il punto  $C$  ha ascissa  $\frac{x_A + x_B}{2} = 2$  e ordinata pari all'altezza del triangolo equilatero  $ABC$ , ovvero  $2\sqrt{3}$ . Pertanto  $C(2; 2\sqrt{3})$ . Il punto  $H$  è ortocentro, incentro e baricentro del triangolo equilatero  $ABC$  e del triangolo equilatero  $MNP$ : esso divide la mediana  $CQ$  in due parti, una doppia dell'altra, per cui  $H\left(2; \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$ . Per il rapporto di similitudine tra i due triangoli, risulta poi che  $M$  è punto medio di  $AH$ , come  $N$  lo è di  $BH$  e  $P$  di  $CH$ . Attraverso la formula del punto medio di un segmento si trova:  $M\left(1; \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ ,  $N\left(3; \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$  e  $P\left(2; \frac{4}{3}\sqrt{3}\right)$ .

**B3)** Una parabola con asse di simmetria parallelo all'asse  $y$  ha equazione generica  $y = ax^2 + bx + c$ .

Poiché la parabola passa per i punti  $A(0; 0)$ ,  $B(4; 0)$  e  $M\left(1; \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ , si ottiene il sistema in  $a$ ,  $b$ ,  $c$ :

$$\begin{cases} c = 0 \\ 16a + 4b + c = 0 \\ a + b + c = \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c = 0 \\ 4a + b = 0 \\ a + b = \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c = 0 \\ b = -4a \\ -3a = \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = -\frac{\sqrt{3}}{9} \\ b = \frac{4}{9}\sqrt{3} \\ c = 0 \end{cases}.$$

La parabola ha equazione  $y = -\frac{\sqrt{3}}{9}x^2 + \frac{4}{9}\sqrt{3}x$ . Essa passa per il punto  $N$  poiché tale punto è simmetrico al punto  $M$  della parabola, rispetto all'asse di simmetria. Diversamente si può verificare che le coordinate di  $N$  soddisfano l'equazione della parabola:

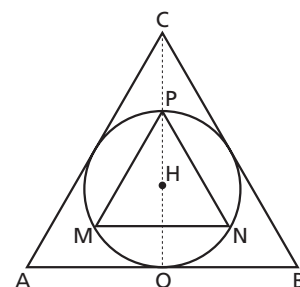
$$\frac{\sqrt{3}}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{9} \cdot 9 + \frac{4}{9}\sqrt{3} \cdot 3 \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Nella figura 2 è rappresentato il grafico della parabola.

**B4)** Nel punto A) è stato stabilito che i triangoli equilateri  $MNP$  e  $ABC$  sono simili con rapporto di similitudine  $k = \frac{1}{2}$ ; nel punto B2) si era osservato che  $M$  è punto medio di  $AH$ , come  $N$  lo è di  $BH$  e  $P$  di  $CH$  (figura 2). Si può così dedurre che la trasformazione che muta il triangolo  $ABC$  nel triangolo  $MNP$  è una particolare similitudine, ovvero un'omotetia di rapporto  $k$  e centro  $H\left(2; \frac{2}{3}\sqrt{3}\right)$ . Pertanto la trasformazione geometrica ha equazioni:

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{2}(x - 2) + 2 \\ y' = \frac{1}{2}\left(y - \frac{2}{3}\sqrt{3}\right) + \frac{2}{3}\sqrt{3} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x' = \frac{1}{2}x + 1 \\ y' = \frac{1}{2}y + \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}.$$

**B5)** La circonferenza circoscritta al triangolo equilatero  $MNP$  ha centro nel circocentro  $H$  del triangolo e raggio  $r = \overline{HP}$ , cioè  $r = \frac{2}{3}\sqrt{3}$  (figura 3).



▲ Figura 3.

Tale circonferenza coincide con la circonferenza inscritta nel triangolo equilatero  $ABC$ . Infatti quest'ultima ha centro in  $H$  e ha raggio  $r' = \overline{HQ}$ , cioè  $r' = \frac{2}{3}\sqrt{3}$ .