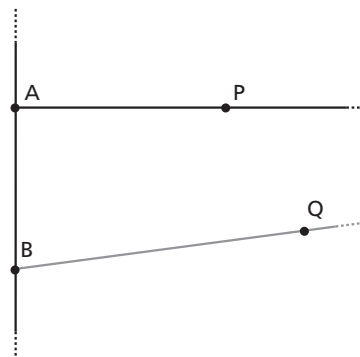


**ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO  
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. • 2009**

- 10** «Se due punti  $P$  e  $Q$  del piano giacciono dalla stessa parte rispetto a una retta  $AB$  e gli angoli  $\hat{P}AB$  e  $\hat{Q}BA$  hanno somma minore di  $180^\circ$ , allora le semirette  $AP$  e  $BQ$ , prolungate adeguatamente al di là dei punti  $P$  e  $Q$ , si devono intersecare.» Questa proposizione è stata per secoli oggetto di studio da parte di schiere di matematici. Si dica perché e con quali risultati.

► **Figura 2.**



## SOLUZIONE DELLA PROVA D'ESAME CORSO SPERIMENTALE P.N.I. • 2009

**10** La proposizione riportata dal testo è il V Postulato di Euclide. Euclide, matematico greco vissuto attorno al 300 a.C., scrisse gli *Elementi*, un'opera che costituisce una sintesi organica delle conoscenze di matematica elementare possedute dagli antichi Greci. Tutta la teoria geometrica presentata nei tredici libri degli *Elementi* si sviluppa a partire da cinque postulati, leggi considerate vere sulla base dell'evidenza e dell'intuizione comune. Tuttavia, rispetto ai precedenti, il V Postulato si distingue per la complessità del suo enunciato e per la costruzione geometrica. Di tale difficoltà erano consapevoli già i primi commentatori all'opera euclidea; il dibattito sulla validità del V Postulato si è protratto per oltre duemila anni e ha avuto come estrema conseguenza la costruzione delle geometrie non euclidee: geometrie basate su un sistema assiomatico diverso da quello di Euclide.

In prima istanza si tentò di risolvere le difficoltà legate al V Postulato cercando di dimostrarlo a partire dai primi quattro: in questo modo, il V Postulato sarebbe stato dedotto come un teorema. In tale direzione ricordiamo l'opera di Girolamo Saccheri (1667-1733), il quale dette inconsapevolmente un contributo fondamentale allo sviluppo delle geometrie non euclidee.

Tuttavia i numerosi tentativi compiuti in questa direzione si dimostrarono sempre fallimentari. Ciononostante i matematici fino al XIX secolo non dubitarono mai della validità del V Postulato.

Nella prima metà del XIX secolo i matematici Bolyai e Lobačevskij furono i primi a costruire una geometria non euclidea, ottenuta sostituendo il V Postulato con la sua negazione (geometria iperbolica). Nella geometria iperbolica, dati una retta e un punto esterno a essa, esistono infinite rette passanti per il punto dato che non intersecano la retta.

Oltre alla geometria iperbolica furono costruite altre geometrie non euclidee, dette geometria sferica e geometria ellittica.

Per dimostrare che le geometrie non-euclidee sono coerenti tanto quanto quella euclidea, si ricorre all'uso di modelli che consentono di interpretare i risultati non euclidei per mezzo delle proprietà di particolari enti euclidei. In particolare i modelli di Poincaré e di Riemann possono essere utilizzati per visualizzare, rispettivamente, le proprietà delle geometrie iperbolica e sferica.