

ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. • 2005
Sessione straordinaria

■ **PROBLEMA 1**

Considerato un triangolo ABC , acutangolo e isoscele sulla base BC , si chiami D il piede della sua altezza condotta per C e si costruisca, dalla stessa parte di A rispetto a BC , il punto E in modo che il triangolo ECD sia simile ad ABC .

a) Dimostrare che:

- 1) EC è perpendicolare a CB ;
- 2) i triangoli EFC e AFD – dove F è il punto comune ai segmenti ED e AC – sono simili e, di conseguenza, anche i triangoli EFA e CFD sono simili e gli angoli \widehat{AEF} e \widehat{FCD} sono congruenti;
- 3) EA è parallela a CB ;
- 4) il quadrilatero $AECD$ è inscritto in una circonferenza.

b) Ammesso che le misure di BC e CD , rispetto a un'assegnata unità di misura, siano 6 e $\frac{24}{5}$, dopo aver riferito il piano della figura a un conveniente sistema di assi cartesiani, determinare:

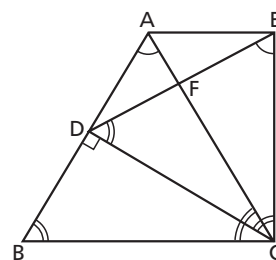
- 1) il seno e il coseno dell'angolo \widehat{BCD} ;
- 2) le equazioni della similitudine che trasforma il triangolo ABC nel triangolo EDC .

SOLUZIONE DELLA PROVA D'ESAME
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. • 2005
Sessione straordinaria

PROBLEMA 1

a1. Considerato il triangolo acutangolo isoscele ABC (figura 1), con CD altezza condotta per C , si costruisce il triangolo isoscele ECD di base CD , simile al triangolo ABC . Pertanto i triangoli ABC ed ECD hanno gli angoli ordinatamente congruenti.

Nel triangolo rettangolo BCD l'angolo \widehat{DBC} è complementare a \widehat{BCD} . Poiché l'angolo \widehat{DCE} è congruente a \widehat{DBC} per costruzione, risulta che \widehat{DCE} è complementare a \widehat{BCD} . Pertanto l'angolo \widehat{BCE} è retto perché somma di due angoli complementari ed EC è perpendicolare a CB .



▲ Figura 1.

a2. Considerati i triangoli EFC e AFD , essi hanno: $\widehat{AFD} \cong \widehat{EFC}$ perché angoli opposti al vertice; $\widehat{DAF} \cong \widehat{FEC}$ per costruzione. I triangoli sono simili per il primo criterio di similitudine e quindi hanno i lati ordinatamente in proporzione. In particolare risulta: $AF:DF = EF:CF$. Ora, i triangoli EFA e CFD hanno due lati ordinatamente proporzionali e gli angoli compresi \widehat{AFE} e \widehat{DFC} congruenti perché opposti al vertice. Quindi, per il secondo criterio di similitudine i triangoli EFA e CFD sono simili e, in particolare, \widehat{AEF} e \widehat{FCD} sono congruenti.

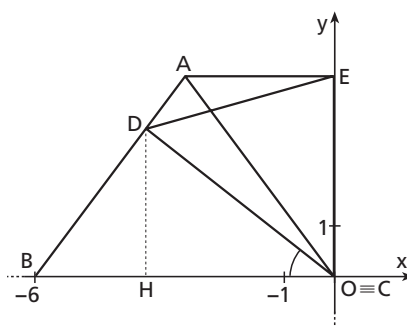
a3. I triangoli EFA e CFD sono simili per la dimostrazione precedente, quindi \widehat{FAE} è congruente a \widehat{FDC} . Ma $\widehat{FDC} \cong \widehat{BCA}$ per costruzione, pertanto, per la proprietà transitiva $\widehat{FAE} = \widehat{BCA}$. Considerati i segmenti EA e CB , essi formano con la trasversale AC angoli alterni interni congruenti e quindi, per il teorema inverso delle rette parallele, i segmenti EA e CB sono paralleli.

a4. Si osservino gli angoli del quadrilatero $AECD$. Poiché EA è parallelo a CB e \widehat{BCE} è retto per dimostrazioni precedenti, l'angolo \widehat{AEC} è anch'esso retto per il teorema delle rette parallele. L'angolo \widehat{ADC} del quadrilatero, opposto a \widehat{AEC} , è retto per costruzione, pertanto il quadrilatero $AECD$ ha gli angoli opposti \widehat{AEC} e \widehat{ADC} supplementari. Tenendo conto che la somma degli angoli interni di un quadrilatero è pari a due angoli piatti, anche i restanti angoli interni e opposti \widehat{DAE} e \widehat{ECD} del quadrilatero sono supplementari. Per il teorema inverso dei quadrilateri inscritti, il quadrilatero $AECD$ è quindi inscrittibile in una circonferenza.

b1. Si fissa un sistema cartesiano ortogonale centrato nel punto C e tale che il lato BC sia sull'asse negativo delle ascisse (figura 2). Le coordinate dei punti B e C sono quindi: $B(-6;0)$ e $C(0;0)$.

Il triangolo BCD è rettangolo per costruzione e sono note le misure del cateto $\overline{CD} = \frac{24}{5}$ e dell'ipotenusa $\overline{BC} = 6$. Quindi il coseno dell'angolo \widehat{BCD} si determina applicando il teorema di trigonometria sui triangoli rettangoli:

$$\overline{CD} = \overline{BC} \cdot \cos(\widehat{BCD}) \quad \rightarrow \quad \cos(\widehat{BCD}) = \frac{\overline{CD}}{\overline{BC}} = \frac{\frac{24}{5}}{6} = \frac{4}{5}.$$



▲ Figura 2.

Per l'identità fondamentale della goniometria $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ e tenendo conto che l'angolo \widehat{BCD} è acuto, risulta:

$$\sin \widehat{BCD} = \sqrt{1 - \cos^2 \widehat{BCD}} = \sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{3}{5}.$$

b2. Primo metodo.

Si osservi la figura 2: i triangoli ABC e EDC sono simili per costruzione. Il loro rapporto di similitudine k può essere calcolato confrontando le misure dei lati proporzionali BC e CD :

$$k = \frac{\overline{CD}}{\overline{BC}} \rightarrow k = \frac{\frac{24}{5}}{6} = \frac{4}{5}.$$

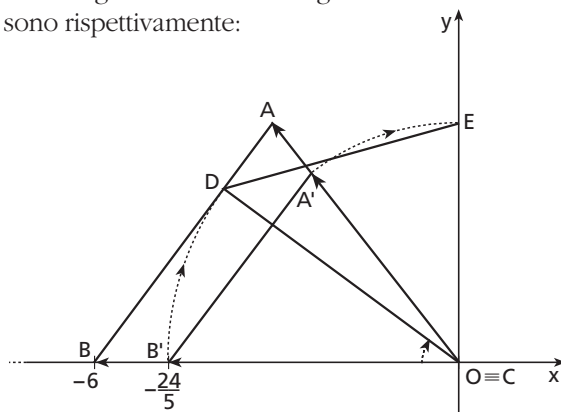
Le equazioni della similitudine che trasforma il triangolo ABC nel triangolo EDC possono essere determinate tramite la composizione di due trasformazioni: una omotetia di centro O e rapporto $k = \frac{4}{5}$ (figura 3), che trasforma il triangolo ABC nel triangolo $A'B'C$, congruente al triangolo EDC ; una rotazione oraria di centro O e angolo \widehat{BCD} , che trasforma il triangolo $A'B'C$ nel triangolo EDC .

Le equazioni dell'omotetia e della rotazione stabilite sono rispettivamente:

$$\begin{cases} x' = kx \\ y' = ky \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x' = \frac{4}{5}x \\ y' = \frac{4}{5}y \end{cases},$$

$$\begin{cases} x'' = x' \cos(-\widehat{BCD}) - y' \sin(-\widehat{BCD}) \\ y'' = x' \sin(-\widehat{BCD}) + y' \cos(-\widehat{BCD}) \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} x'' = \frac{4}{5}x' + \frac{3}{5}y' \\ y'' = -\frac{3}{5}x' + \frac{4}{5}y' \end{cases};$$



▲ Figura 3.

eseguendo la loro composizione si ottengono le equazioni della similitudine cercata:

$$\begin{cases} x'' = \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5}x + \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5}y \\ y'' = \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5}x + \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5}y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x'' = \frac{16}{25}x + \frac{12}{25}y \\ y'' = -\frac{12}{25}x + \frac{16}{25}y \end{cases}.$$

Si nota, come ci si aspettava, che la trasformazione è della forma: $\begin{cases} x'' = mx - ny \\ y'' = nx + my \end{cases}$, cioè una similitudine diretta di rapporto $k = \sqrt{m^2 + n^2}$, dove $m = \frac{16}{25}$ e $n = \frac{12}{25}$, per cui

$$k = \left(\frac{16}{25}\right)^2 + \left(\frac{12}{25}\right)^2 = \frac{20}{25} = \frac{4}{5}, \text{ come era richiesto.}$$

Secondo metodo.

Le equazioni di una similitudine sono:

$$\begin{cases} x' = ax - by + c \\ y' = bx + ay + c' \end{cases} \quad \text{con} \quad \begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix} = a^2 + b^2 \neq 0$$

con $\sqrt{a^2 + b^2} = k$, essendo k il rapporto di similitudine.

Dobbiamo determinare a , b , c , c' . Consideriamo la trasformazione del segmento BC nel segmento DC . Essendo (vedi figura 2):

$$\overline{HC} = \overline{DC} \cos D\hat{C}B = \frac{24}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{96}{25}, \quad \overline{DH} = \overline{DC} \sin D\hat{C}B = \frac{24}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{72}{25},$$

abbiamo la trasformazione:

$$B(-6; 0) \rightarrow D\left(-\frac{96}{25}; \frac{72}{25}\right),$$

$$C(0; 0) \rightarrow C(0; 0).$$

Sostituendo nelle equazioni della similitudine, otteniamo:

$$\begin{cases} 0 = c \\ 0 = c' \\ -\frac{96}{25} = -6a + c \rightarrow a = \frac{16}{25} \\ \frac{72}{25} = -6b + c' \rightarrow b = -\frac{12}{25} \end{cases}$$

Le equazioni della similitudine sono:

$$\begin{cases} x' = \frac{16}{25}x + \frac{12}{25}y \\ y' = -\frac{12}{25}x + \frac{16}{25}y \end{cases} \quad \text{con} \quad k = \sqrt{\left(\frac{16}{25}\right)^2 + \left(\frac{12}{25}\right)^2} = \frac{20}{25} = \frac{4}{5}.$$