

SIMULAZIONE DELLA PROVA D'ESAME DI LICEO SCIENTIFICO CORSO SPERIMENTALE P.N.I.

PROBLEMA 1

In un piano è data la circonferenza λ di centro O e raggio $OA = r$; conduci per A la retta a tangente a λ e una semiretta di origine O che intersechi la tangente nel punto B e la circonferenza in C . La retta passante per C e parallela ad a incontra in D il segmento OA e in M la parallela ad OA passante per B .

1. Dimostra che valgono le proporzioni: $\overline{OD} : \overline{DC} = \overline{OC} : \overline{DM}$, $\overline{OA} : \overline{OD} = \overline{BC} : \overline{DA}$.
2. Dimostra che il luogo geometrico Γ descritto da M al variare di B è simmetrico rispetto alla retta OA .
3. Scelto il riferimento cartesiano ortogonale con origine nel centro della circonferenza e l'asse y passante per A orientato come la semiretta OA , verifica che l'equazione della curva Γ descritta da M al variare di

$$B \text{ è: } f(x) = \frac{r^2}{\sqrt{x^2 + r^2}}.$$

4. Traccia il grafico di Γ .
5. Posto $r = 2$ considera il solido Ω avente
 - per base la regione di piano delimitata dal semiasse positivo delle x , dall'asse y e da Γ ;
 - come sezioni ortogonali al piano (x, y) i triangoli equilateri di lato $l = f(x)$.

Verifica che il volume di Ω è: $\pi\sqrt{3}$.

Applichiamo il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo ODC :

$$\overline{DC}^2 + \overline{OD}^2 = \overline{OC}^2 \rightarrow \overline{DC}^2 + y^2 = r^2.$$

Sostituiamo a \overline{DC} la precedente espressione e riduciamo:

$$\frac{x^2 y^2}{r^2} + y^2 = r^2 \rightarrow y^2 = \frac{r^4}{x^2 + r^2} \rightarrow y = \frac{\pm r^2}{\sqrt{x^2 + r^2}}.$$

Accettiamo soltanto il segno positivo perché, per costruzione, la curva giace nel I e nel II quadrante (gli angoli \widehat{AOB} sono acuti), quindi:

$$f(x) = \frac{r^2}{\sqrt{x^2 + r^2}}.$$

4. Campo di esistenza: \mathbb{R} ; segno: $f(x) > 0 \forall x \in \mathbb{R}$; $f(0) = r$; $f(x)$ è: pari. La funzione è continua $\forall x \in \mathbb{R}$.
Asintoti:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{r^2}{\sqrt{x^2 + r^2}} = 0, \quad \text{l'asse delle ascisse è asintoto orizzontale.}$$

Derivata prima: $f'(x) = -\frac{r^2 x}{\sqrt{(x^2 + r^2)^3}}$. Pertanto:

$$x < 0 \rightarrow f'(x) > 0, \quad f(x) \text{ crescente};$$

$$x > 0 \rightarrow f'(x) < 0, \quad f(x) \text{ decrescente};$$

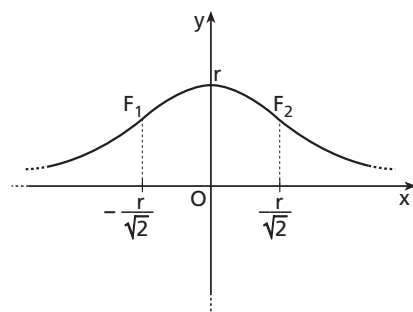
$$x = 0 \rightarrow f'(x) = 0, \quad \text{punto di massimo relativo e assoluto.}$$

Derivata seconda: $f''(x) = \frac{r^2(2x^2 - r^2)}{\sqrt{(x^2 + r^2)^5}}$. Pertanto:

$$-\frac{r}{\sqrt{2}} < x < \frac{r}{\sqrt{2}} \rightarrow f''(x) < 0, \quad \text{concavità verso il basso};$$

$$x < -\frac{r}{\sqrt{2}} \vee x > \frac{r}{\sqrt{2}} \rightarrow f''(x) > 0, \quad \text{concavità verso il basso};$$

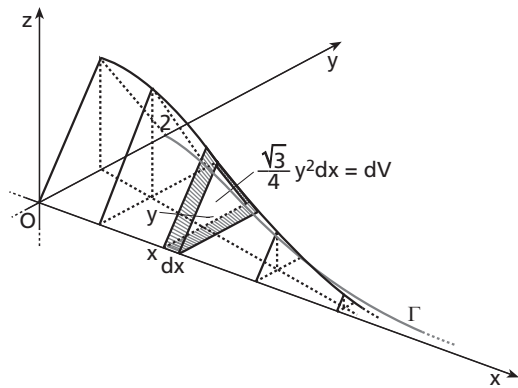
$$x = \pm \frac{r}{\sqrt{2}} \rightarrow f''(x) = 0, \quad \text{punti di flesso.}$$



◀ Figura 3.

5. Posto $r = 2$ la funzione assume l'espressione: $f(x) = \frac{4}{\sqrt{x^2 + 4}}$.

Per rappresentare il solido Ω utilizziamo un riferimento tridimensionale.



◀ Figura 4.

Consideriamo una generica sezione del solido di ascissa x e scriviamo l'espressione del corrispondente elemento infinitesimo di volume:

$$dV = \left(\frac{1}{2} y \frac{\sqrt{3}}{2} y \right) dx = \frac{\sqrt{3}}{4} y^2 dx = \frac{4\sqrt{3}}{x^2 + 4} dx.$$

Per determinare il volume di Ω calcoliamo l'integrale improprio:

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{4\sqrt{3}}{x^2 + 4} dx &= 4\sqrt{3} \lim_{m \rightarrow +\infty} \int_0^m \frac{1}{x^2 + 4} dx = 4\sqrt{3} \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{1}{4} \int_0^m \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{2}\right)^2} dx = \\ &= \sqrt{3} \lim_{m \rightarrow +\infty} \left[2 \arctg \frac{x}{2} \right]_0^m = 2\sqrt{3} \lim_{m \rightarrow +\infty} \left(\arctg \frac{m}{2} \right) = 2\sqrt{3} \frac{\pi}{2} = \pi\sqrt{3}. \end{aligned}$$