PROBLEMA 1

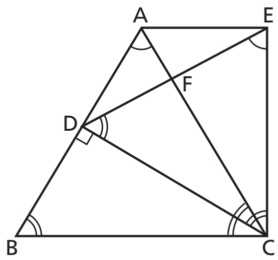
Considerato un triangolo *ABC*, acutangolo e isoscele sulla base *BC*, si chiami *D* il piede della sua altezza condotta per *C* e si costruisca, dalla stessa parte di *A* rispetto a *BC*, il punto *E* in modo che il triangolo *ECD* sia simile ad *ABC*.

a) Dimostrare che:
1) *EC* è perpendicolare a *CB*;
2) i triangoli *EFC* e *AFD* – dove *F* è il punto comune ai segmenti *ED* e *AC* – sono simili e, di conseguenza, anche i triangoli *EFA* e *CFD* sono simili e gli angoli $A\hat{E}F$ e $F\hat{C}D$ sono congruenti;
3) *EA* è parallela a *CB*;
4) il quadrilatero *AECD* è inscrivibile in una circonferenza.

b) Ammesso che le misure di *BC* e *CD*, rispetto a un'assegnata unità di misura, siano 6 e $\frac{24}{5}$, dopo aver riferito il piano della figura a un conveniente sistema di assi cartesiani, determinare:
1) le coordinate dei punti *A*, *B*, *C*, *D*, *E*;
2) l'equazione della circonferenza circoscritta al quadrilatero *AECD*.

PROBLEMA 1

a1. Considerato il triangolo acutangolo isoscele ABC (figura 1), con CD altezza condotta per C, si costruisce il triangolo isoscele ECD di base CD, simile al triangolo ABC. Pertanto i triangoli ABC e ECD hanno gli angoli ordinatamente congruenti.
Nel triangolo rettangolo BCD l'angolo $D\hat{B}C$ è complementare a $B\hat{C}D$. Poiché l'angolo $D\hat{C}E$ è congruente a $D\hat{B}C$ per costruzione, risulta che $D\hat{C}E$ è complementare a $B\hat{C}D$. Pertanto l'angolo $B\hat{C}E$ è retto perché somma di due angoli complementari ed EC è perpendicolare a CB.



▲ **Figura 1.**

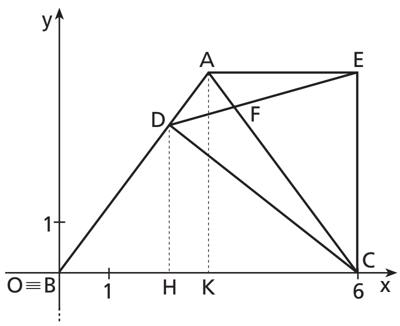
a2. Considerati i triangoli EFC e AFD, essi hanno: $A\hat{F}D \cong E\hat{F}C$ perché angoli opposti al vertice; $D\hat{A}F \cong F\hat{E}C$ per costruzione. I triangoli sono simili per il primo criterio di similitudine e quindi hanno i lati ordinatamente in proporzione. In particolare risulta: $AF : DF = EF : CF$. Ora, i triangoli EFA e CFD hanno due lati ordinatamente proporzionali e gli angoli compresi $A\hat{F}E$ e $D\hat{F}C$ congruenti perché opposti al vertice. Quindi, per il secondo criterio di similitudine i triangoli EFA e CFD sono simili e, in particolare, $A\hat{E}F$ e $F\hat{C}D$ sono congruenti.

a3. I triangoli EFA e CFD sono simili per la dimostrazione precedente, quindi $F\hat{A}E$ è congruente a $F\hat{D}C$. Ma $F\hat{D}C \cong B\hat{C}A$ per costruzione, pertanto, per la proprietà transitiva $F\hat{A}E = B\hat{C}A$. Considerati i segmenti EA e CB, essi formano con la trasversale AC angoli alterni interni congruenti e quindi, per il teorema inverso delle rette parallele, i segmenti EA e CB sono paralleli.

a4. Si osservino gli angoli del quadrilatero $AECD$. Poiché EA è parallelo a CB e $B\hat{C}E$ è retto per dimostrazioni precedenti, l'angolo $A\hat{E}C$ è anch'esso retto per il teorema delle rette parallele. L'angolo $A\hat{D}C$ del quadrilatero, opposto a $A\hat{E}C$, è retto per costruzione, pertanto il quadrilatero $AECD$ ha gli angoli opposti $A\hat{E}C$ e $A\hat{D}C$ supplementari. Tenendo conto che la somma degli angoli interni di un quadrilatero è pari a due angoli piatti, anche i restanti angoli interni e opposti $D\hat{A}E$ e $E\hat{C}D$ del quadrilatero sono supplementari. Per il teorema inverso dei quadrilateri inscritti, il quadrilatero $AECD$ è quindi inscrivibile in una circonferenza.

b1. Si fissa un sistema cartesiano ortogonale centrato nel punto B e tale che il lato BC sia sull'asse positivo delle ascisse (figura 2).

Per ipotesi $\overline{BC} = 6$ e $\overline{CD} = \frac{24}{5}$, quindi le coordinate dei punti B e C sono: $B(0; 0)$ e $C(6; 0)$. Tracciata l'altezza DH del triangolo rettangolo BCD, si applica a esso il primo teorema di Euclide per ricavare HC:



▲ **Figura 2.**

$$\overline{CD}^2 = \overline{BC} \cdot \overline{HC} \quad \rightarrow \overline{HC} = \frac{\overline{CD}^2}{\overline{BC}} \quad \rightarrow \quad \overline{HC} = \frac{\left(\frac{24}{5}\right)^2}{6} = \frac{96}{25}.$$

Pertanto l'ascissa del punto D vale: $x_D = \overline{BH} = \overline{BC} - \overline{HC} \quad \rightarrow \quad x_D = 6 - \frac{96}{25} = \frac{54}{25}.$

Inoltre, per il secondo teorema di Euclide, risulta: $y_D = \overline{DH} = \sqrt{\overline{BH} \cdot \overline{HC}}$ ovvero $y_D = \sqrt{\frac{54}{25} \cdot \frac{96}{25}} = \frac{72}{25}$.
Il punto D ha coordinate $D\left(\frac{54}{25}; \frac{72}{25}\right)$.

Disegnata l'altezza AK del triangolo isoscele ABC, essa è anche mediana della base BC, per cui $x_A = \overline{BK} = 3$. Ora, i triangoli BHD e BKA sono simili per il primo criterio di similitudine e hanno i lati ordinatamente proporzionali. Vale la relazione $\overline{BH} : \overline{BK} = \overline{DH} : \overline{AK}$ e si ricava:

$$\overline{AK} = \frac{\overline{BK} \cdot \overline{DH}}{\overline{BH}} \quad \rightarrow \quad \overline{AK} = \frac{3 \cdot \frac{72}{25}}{\frac{54}{25}} = 4.$$

Poiché $\overline{AK} = y_A$ risulta $y_A = 4$ e il punto A ha coordinate $A(3; 4)$.
Infine, essendo AE parallelo a BC e EC perpendicolare a BC per dimostrazioni precedenti, si deduce che il punto E ha coordinate $E(6; 4)$.

b2. Il quadrilatero $AECD$ ha gli angoli opposti $A\hat{D}C$ e $A\hat{E}C$ entrambi retti, rispettivamente per costruzione e per dimostrazione precedente. Pertanto la sua diagonale AC sarà il diametro della circonferenza a esso circoscritta. Il centro G di tale circonferenza è il punto medio del segmento AC, mentre il raggio r è la metà della lunghezza dello stesso segmento. Risulta:

$$G\begin{cases} x = \frac{x_A + x_C}{2} & \rightarrow \quad x = \frac{9}{2} \\ y = \frac{y_A + y_C}{2} & \rightarrow \quad y = 2 \end{cases}$$

$$r = \frac{\overline{AC}}{2} \quad \rightarrow \quad r = \frac{\sqrt{(3-6)^2 + (4-0)^2}}{2} = \frac{5}{2}.$$

Secondo la definizione della circonferenza come luogo geometrico, essa ha equazione:

$$(x - x_G)^2 + (y - y_G)^2 = r^2 \text{ cioè}$$

$$\left(x - \frac{9}{2}\right)^2 + (y-2)^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 \quad \rightarrow \quad x^2 + y^2 - 9x - 4y + 18 = 0 .$$

Nella figura 3 è tracciata la circonferenza circoscritta al quadrilatero $AECD$.

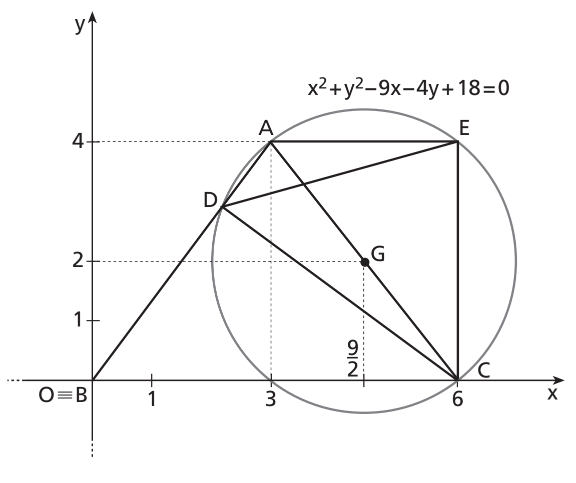


Figura 3.

