PROBLEMA 1

Si consideri un tetraedro regolare T di vertici A, B, C, D.

a) Indicati rispettivamente con V ed S il volume e l'area totale di T e con r il raggio della sfera inscritta in T, trovare una relazione che leghi V, S ed r.

b) Considerato il tetraedro regolare T' avente per vertici i centri delle facce di T, calcolare il rapporto fra le lunghezze degli spigoli di T e T' e il rapporto fra i volumi di T e T'.

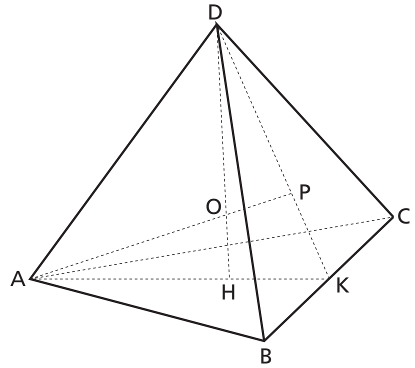
c) Condotto il piano α, contenente la retta AB e perpendicolare alla retta CD nel punto E, e posto che uno spigolo di T sia lungo s, calcolare la distanza di E dalla retta AB.

d) Considerata nel piano α la parabola p avente l'asse perpendicolare alla retta AB e passante per i punti A, B ed E, riferire questo piano ad un conveniente sistema di assi cartesiani ortogonali e trovare l'equazione di p.

e) Determinare per quale valore di s la regione piana delimitata dalla parabola p e dalla retta EA ha area $\frac{\sqrt{2}}{3}\text{cm}^2$.

PROBLEMA 1

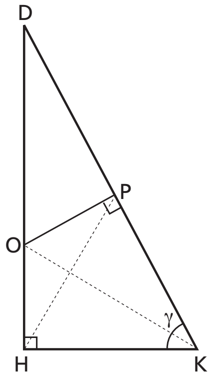
a) Detto s lo spigolo del tetraedro T, si ha che AK e DK sono le altezze di due facce di T (figura 1) e misurano $s\frac{\sqrt{3}}{2}$. Le altezze AK e DK sono anche bisettrici e mediane. L'altezza DH cade nel baricentro del triangolo ABC, quindi $\overline{HK}=\frac{1}{3}\overline{AK}=s\frac{\sqrt{3}}{6}$. L'altezza DH si può calcolare con il teorema di Pitagora applicato al triangolo DHK (figura 2): risulta $\overline{DH}=s\sqrt{\frac{2}{3}}$.



▶ **Figura 1.**

Le altezze del tetraedro si incontrano nel punto O, centro della sfera inscritta in T, che ha raggio $OH=OP=r$.
I triangoli rettangoli KOH e KOP sono congruenti, allora KO è la bisettrice di $H\hat{K}P=\gamma$. Considerando il triangolo OHK, si può scrivere: $r=\overline{HK}\cdot \mathrm{tg}\frac{\gamma}{2}=s\frac{\sqrt{3}}{6}\cdot \mathrm{tg}\frac{\gamma}{2}$, ma $\mathrm{tg}\gamma=\frac{\overline{DH}}{\overline{HK}}=2\sqrt{2}$, da cui, attraverso le formule di bisezione si giunge a: $\mathrm{tg}\frac{\gamma}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$. In definitiva risulta: $r=\frac{s}{2\sqrt{6}}$.

La superficie del tetraedro è: $S=4\cdot\left(\frac{1}{2}s\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}s\right)=s^2\sqrt{3}=r^2\cdot 24\sqrt{3}$.



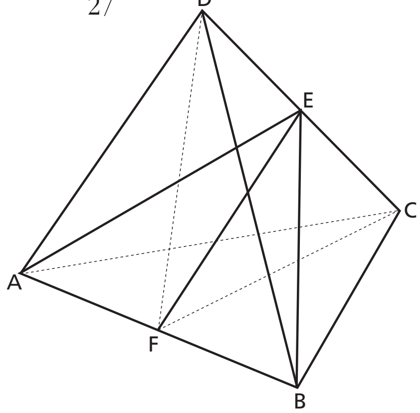
▲ **Figura 2.**

Il volume risulta: $V=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}s^2\cdot s\sqrt{\frac{2}{3}}=\frac{\sqrt{2}}{12}s^3=r^3\cdot 8\sqrt{3}$, da cui segue: $V=\frac{1}{3}\cdot S\cdot r$.

b) HP è uno spigolo del tetraedro T', con riferimento al triangolo HPK, nel quale si nota che $K\hat{H}P=K\hat{P}H=\frac{\pi}{2}-\frac{\gamma}{2}$, si ha: $\frac{\overline{HP}}{\mathrm{sen}\,\gamma}=\frac{\overline{HK}}{\cos\frac{\gamma}{2}}\Rightarrow\overline{HP}=2\cdot\overline{HK}\cdot\mathrm{sen}\frac{\gamma}{2}$. Dal valore di $\mathrm{tg}\frac{\gamma}{2}$ si ricava $\mathrm{sen}\frac{\gamma}{2}=\frac{1}{\sqrt{3}}$. Allora $s'=\overline{HP}=2\cdot s\frac{\sqrt{3}}{6}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{s}{3}$, da cui si ha: $V'=\frac{1}{27}V$.

c) Con riferimento alla figura 3, detto F il punto medio di AB, allora DF e CF sono le mediane delle facce ADB e ACB rispettivamente, il triangolo DFC è quindi isoscele e l'altezza EF è anche mediana: il piano α interseca CD nel punto medio E. AE è la mediana della faccia CAD, BE è la mediana della faccia CBD, quindi ABE è isoscele e la mediana EF è anche altezza. Dal teorema di Pitagora per AEF:

$$\overline{EF}=\sqrt{\overline{AE}^2-\overline{AF}^2}=\sqrt{\left(s\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-\left(\frac{s}{2}\right)^2}=s\frac{\sqrt{2}}{2}.$$



▶ **Figura 3.**

d) Scelto il sistema di riferimento con origine nel punto F, asse delle ascisse coincidente con la retta orientata AB, asse delle ordinate coincidente con la retta orientata FE (figura 4), si scrive l'equazione della parabola $y = ax^2 + bx + c$, passante per i punti $A\left(-\frac{s}{2}; 0\right)$, $B\left(\frac{s}{2}; 0\right)$, $E\left(0; s\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Risulta: $\begin{cases} 0 = a \cdot \left(-\frac{s}{2}\right)^2 + b \cdot \left(-\frac{s}{2}\right) + c \\ 0 = a \cdot \left(\frac{s}{2}\right)^2 + b \cdot \left(\frac{s}{2}\right) + c \\ s\frac{\sqrt{2}}{2} = c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{2\sqrt{2}}{s} \\ b = 0 \\ c = s\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow y = -\frac{2\sqrt{2}}{s}x^2 + s\frac{\sqrt{2}}{2}.$

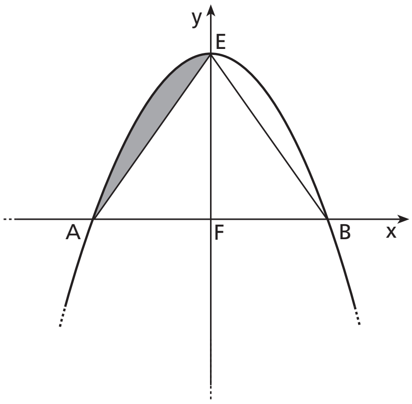


Figura 4.

e) L'area del segmento parabolico ABE è $A_1 = \frac{2}{3} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{EF}$, l'area del triangolo ABE risulta $A_2 = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{EF}$.

L'area delimitata dalla parabola e dalla retta EA è quindi: $A = \frac{1}{2} \cdot (A_1 - A_2) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{6} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{EF}\right) =$
$= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{6} \cdot s \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} s\right) = \frac{s^2\sqrt{2}}{24}$, che risulta pari a $\frac{\sqrt{2}}{3}$ cm^2 quando $s = 2\sqrt{2}$ cm.