

**ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO  
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. • 2007**

- 5** Si consideri il teorema: «*la somma degli angoli interni di un triangolo è un angolo piatto*» e si spieghi perché esso non è valido in un contesto di geometria *non-euclidea*. Quali le formulazioni nella geometria *iperbolica* e in quella *ellittica*? Si accompagni la spiegazione con il disegno.

## SOLUZIONE DELLA PROVA D'ESAME CORSO SPERIMENTALE P.N.I. • 2007

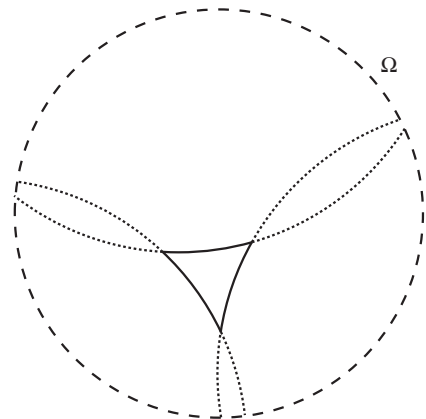
**5** Ricordiamo che una geometria si dice non-euclidea se non assume come valido il V postulato di Euclide. Tale postulato afferma che per un punto esterno a una retta passa una e una sola retta parallela alla retta data.

Si può dimostrare che, in una geometria in cui valgono gli assiomi e i postulati di Euclide a esclusione del V postulato, il teorema «*la somma degli angoli interni di un triangolo è un angolo piatto*» è equivalente al V postulato di Euclide. Di conseguenza questo teorema non può essere valido in un contesto di geometria non-euclidea.

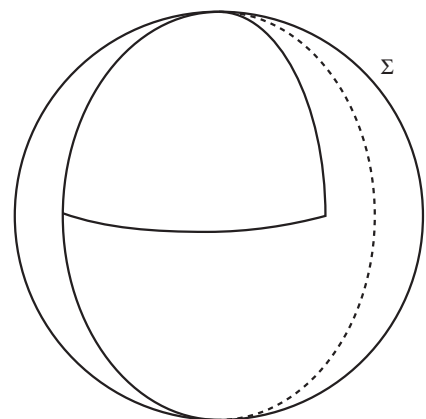
La formulazione del teorema nella geometria iperbolica è «*in un triangolo la somma degli angoli interni è minore di un angolo piatto*».

Una rappresentazione di un triangolo in un modello di geometria iperbolica si può ottenere tramite il modello di Poincaré. In questo caso si considera come piano un cerchio senza bordo  $\Omega$  in cui le rette sono archi di circonferenza interni a  $\Omega$  e ortogonali al suo bordo o diametri di  $\Omega$  (figura 7).

Nella geometria ellittica vale invece il seguente teorema: «*in un triangolo la somma degli angoli interni è maggiore di un angolo piatto*». In un modello di geometria ellittica il piano è la superficie  $\Sigma$  di una sfera, i punti antipodali sono identificati e le rette corrispondono alle circonferenze massime di  $\Sigma$  (figura 8).



▲ Figura 7.



▲ Figura 8.