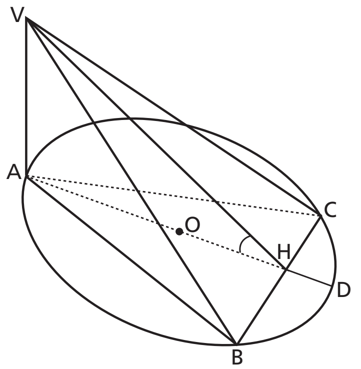
PROBLEMA 2

In una circonferenza di diametro $\overline{AD} = 2r$ è inscritto il triangolo isoscele ABC di base BC. Costruisci la piramide che ha per base il triangolo ABC e altezza il segmento AV congruente a BC.

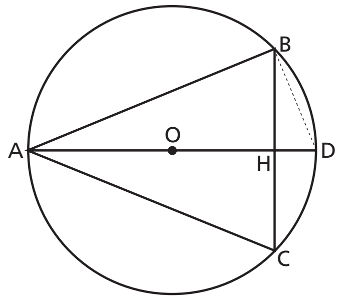
1. Posto $\overline{AH} = x$, essendo H il punto medio del segmento BC, determina la funzione $y = f(x)$ che esprime il volume della piramide $ABCV$.
2. Disegna il grafico di f e determina per quale valore di x il volume della piramide è massimo.
3. In corrispondenza di tale valore determina l'angolo formato dalle facce ABC e VBC.
4. Se y_0 è il valore del volume massimo, calcola l'area della regione finita di piano appartenente al semipiano $x \geq 0$, delimitata dalla funzione f e dalla sua simmetrica rispetto alla retta di equazione $y = y_0$.

PROBLEMA 2

1. Costruiamo la figura.



◀ **Figura 2.**



▲ **Figura 3.**

Il dominio geometrico della variabile $\overline{AH} = x$ è l'intervallo $0 \leq x \leq 2r$.
Scriviamo l'espressione del volume della piramide $ABCV$ tenendo conto che $\overline{AV} = \overline{BC} = 2\overline{BH}$:

$$V_p = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot \overline{AV} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \overline{BC} \cdot \overline{AH} \cdot \overline{AV} = \frac{1}{3} \cdot \overline{BH} \cdot \overline{AH} \cdot (2\overline{BH}) = \frac{2}{3} \cdot \overline{BH}^2 \cdot \overline{AH}.$$

Applichiamo il secondo teorema di Euclide al triangolo rettangolo ADB (inscritto in una semicirconferenza) per esprimere $\overline{BH}$ in funzione di x:

$$\overline{BH}^2 = \overline{AH} \cdot \overline{HD}$$

$$\overline{AH} = x, \quad \overline{HD} = 2r - x \quad \rightarrow \quad \overline{BH}^2 = x(2r - x).$$

Ora scriviamo il volume della piramide in funzione di x:

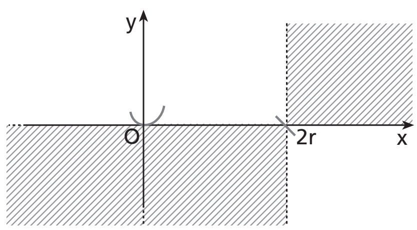
$$V_p = f(x) = \frac{2}{3} x(2r - x)\, x = -\frac{2}{3} x^3 + \frac{4}{3} rx^2, \qquad x \in [0; 2r].$$

2. Disegniamo il grafico eseguendo lo studio completo della funzione su tutto il suo campo di esistenza cioè $\forall x \in \mathbb{R}$.
f è un polinomio di terzo grado quindi è continua e derivabile $\forall x \in \mathbb{R}$, non ha asintoti, ha un punto di flesso.
Segno e intersezioni con gli assi:

$$f(x) > 0 \ \leftrightarrow \ \frac{2}{3} x^2(2r - x) > 0, \ \ x < 2r;$$

$$f(x) < 0 \ \leftrightarrow \ \frac{2}{3} x^2(2r - x) < 0, \ \ x > 2r \wedge x \neq 0;$$

$$f(x) = 0 \ \leftrightarrow \ x^2 = 0 \text{ (radice doppia) oppure } x = 2r.$$

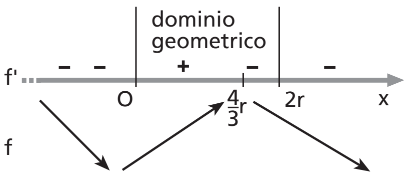


▶ **Figura 4.**

In $x=2r$ la funzione interseca l'asse delle ascisse. In $x=0$ la funzione è tangente all'asse delle ascisse perché ha una radice di molteplicità 2.
Derivata prima: crescenza e decrescenza, massimi e minimi.

$$f'(x)=-2x^2+\frac{8}{3}rx \qquad \text{dunque:}$$

$$f'(x)<0 \ \leftrightarrow\ x<0 \vee x>\frac{4}{3}r; \qquad f'(x)>0 \ \leftrightarrow\ 0<x<\frac{4}{3}r.$$



◀ **Figura 5.**

$O=(0;0)$ è punto di minimo relativo;

$M=\left(\frac{4}{3}r;\ \frac{64}{81}r^3\right)$ è punto di massimo relativo.

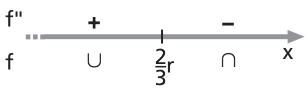
Nell'intervallo $[0;\ 2r]$ la funzione, e quindi il volume della piramide, ha il massimo assoluto $y_0=\frac{64}{81}r^3$ per $x_0=\frac{4}{3}r$.
Completiamo lo studio con l'analisi della derivata seconda per la concavità e i flessi.

$$f''(x)=-4x+\frac{8}{3}r \qquad \text{dunque:}$$

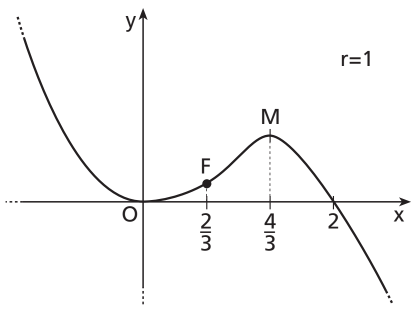
$f''(x)<0 \ \leftrightarrow\ x>\frac{2}{3}r$, concavità verso il basso;

$f''(x)>0 \ \leftrightarrow\ x<\frac{2}{3}r$, concavità verso l'alto;

$F\left(\frac{2}{3}r;\ \frac{32}{81}r^3\right)$ punto di flesso.



▲ **Figura 6.**



◀ **Figura 7.**

3. Le facce ABC e VBC formano un diedro convesso la cui sezione normale $V\hat{H}A$ è l'angolo richiesto. Determiniamo $V\hat{H}A$ mediante la sua tangente goniometrica:

$$\operatorname{tg}(V\hat{H}A)=\frac{\overline{AV}}{\overline{AH}}.$$

Poiché $\overline{AH} = x_0 = \frac{4}{3} r$ e $\overline{AV} = 2\overline{BH} = 2\sqrt{x_0(2r - x_0)} = \frac{4\sqrt{2}}{3} r$ avremo:
$\text{tg}(V\hat{H}A) = \sqrt{2}$ $\quad (V\hat{H}A \simeq 57{,}735\ldots°)$.

4. Tracciamo il grafico sommario della funzione simmetrica di f rispetto alla retta $y = y_0 = \frac{64}{81} r^3$ senza ricavare la sua espressione analitica.

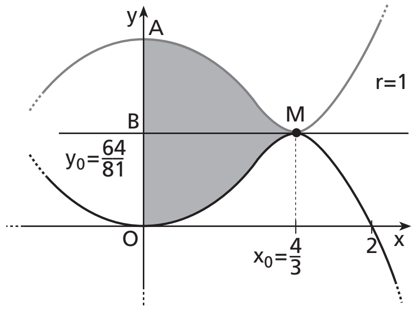


Figura 8.

L'area da determinare, evidenziata con un fondino, è doppia dell'area della regione di piano delimitata dalla retta $y = y_0$, dall'asse delle ordinate e dalla funzione f. Pertanto:

$$S_{OMA} = 2S_{OMB} = 2\int_0^{\frac{4}{3}r} (y_0 - f(x))\,dx = 2\int_0^{\frac{4}{3}r} \frac{64}{81} r^3\,dx - 2\int_0^{\frac{4}{3}r} \left(-\frac{2}{3}x^3 + \frac{4}{3}rx^2\right) dx.$$

Calcoliamo i due integrali separatamente.

$$2\int_0^{\frac{4}{3}r} \frac{64}{81} r^3\,dx = \frac{128}{81} r^3 [x]_0^{\frac{4}{3}r} = \frac{512}{243} r^4.$$

$$2\int_0^{\frac{4}{3}r} \left(-\frac{2}{3}x^3 + \frac{4}{3}rx^2\right) dx = -\frac{4}{3}\left[\frac{1}{4}x^4\right]_0^{\frac{4}{3}r} + \frac{8}{3} r\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^{\frac{4}{3}r} = -\frac{256}{243} r^4 + \frac{512}{243} r^4 = \frac{256}{243} r^4.$$

Il valore dell'area è dunque:

$$S_{OMA} = \frac{512}{243} r^4 - \frac{256}{243} r^4 = \frac{256}{243} r^4.$$