

ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. • 2005
Sessione straordinaria

- 1** Si considerino un tronco di piramide quadrangolare regolare, la cui base maggiore abbia area quadrupla della minore, e un piano α equidistante dalle basi del tronco. Dire se i dati sono sufficienti per calcolare il rapporto fra i volumi dei due tronchi in cui il tronco dato è diviso dal piano α .

SOLUZIONE DELLA PROVA D'ESAME
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. • 2005
Sessione straordinaria

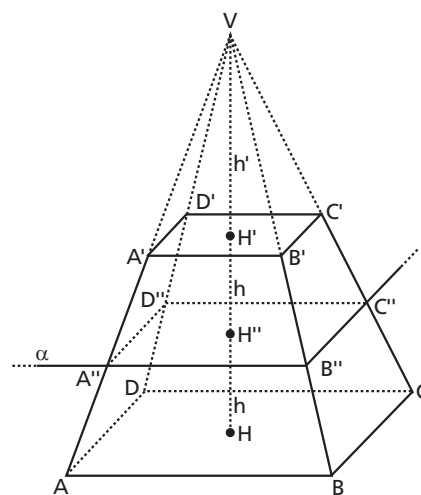
1 Nella figura 7 è rappresentato il tronco di piramide quadrangolare regolare la cui base maggiore $ABCD$ ha area S quadrupla della superficie S' della base minore $A'B'C'D'$. Il piano α è equidistante dalle basi del tronco per cui, indicata con $2h$ la misura dell'altezza HH' , vale $HH'' = H''H' = h$. Il piano intercetta sul tronco il quadrato $A''B''C''D''$ di area S'' .

Prolungati gli spigoli laterali si trova il vertice V della corrispondente piramide di base $ABCD$. Indicata con h' la misura dell'altezza VH' , poiché le aree delle superfici di base di due piramidi simili sono proporzionali ai quadrati delle misure delle rispettive altezze, vale la seguente proporzione:

$$S : (h' + 2h)^2 = S' : h'^2.$$

Essendo $S = 4S'$ per ipotesi, la relazione sopra diventa:

$$4S' : (h' + 2h)^2 = S' : h'^2 \quad \rightarrow \quad \frac{h' + 2h}{h'} = 2 \quad \rightarrow \quad h' = 2h.$$



▲ Figura 7.

Utilizzando tale risultato e applicando lo stesso teorema riferito al piano α si trova:

$$S : (4h)^2 = S'' : (3h)^2 \quad \rightarrow \quad S'' = \frac{9}{16} S \quad \rightarrow \quad S'' = \frac{9}{16} \cdot 4S' = \frac{9}{4} S'.$$

Indicati con V_1 e V_2 i volumi dei tronchi di piramide, rispettivamente inferiore e superiore, in cui risulta diviso il tronco di partenza, essi possono essere calcolati con la formula generale del volume del tronco di piramide. In tal caso il loro rapporto ha espressione:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{1}{3} h(S + S'' + \sqrt{S \cdot S''})}{\frac{1}{3} h(S' + S'' + \sqrt{S' \cdot S''})}.$$

Per le relazioni trovate in precedenza si può scrivere:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\left(4S' + \frac{9}{4} S' + \sqrt{4S' \cdot \frac{9}{4} S'}\right)}{\left(S' + \frac{9}{4} S' + \sqrt{S' \cdot \frac{9}{4} S'}\right)} = \frac{4 + \frac{9}{4} + 3}{1 + \frac{9}{4} + \frac{3}{2}} = \frac{37}{19}.$$

Pertanto i dati sono sufficienti per calcolare tale rapporto.