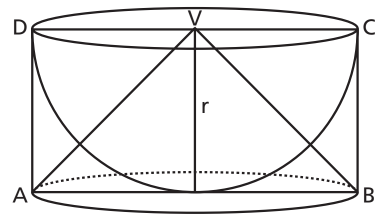
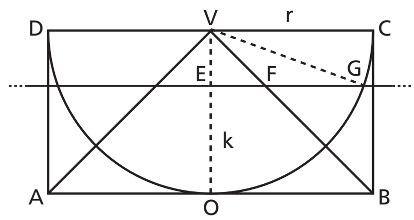
9 Nei *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze*, Galileo Galilei descrive la costruzione di un solido che si chiama *scodella* considerando una semisfera di raggio r e il cilindro a essa circoscritto. La scodella si ottiene togliendo la semisfera dal cilindro. Si dimostri, utilizzando il principio di Cavalieri, che la scodella ha volume pari al cono di vertice V in figura 2.



▶ **Figura 2.**

9 Consideriamo il principio di Cavalieri: «due solidi hanno lo stesso volume (sono equivalenti) se si può fissare un piano in modo che ogni altro piano parallelo a esso tagli i due solidi in sezioni equivalenti». Consideriamo un piano parallelo alla base del cilindro distante k da esso, con $0 \leq k \leq r$ (figura 11).



▶ **Figura 11.**

La sezione formata con il cono è un cerchio di raggio EF. Essendo VEF un triangolo rettangolo isoscele, risulta $\overline{EF} = \overline{VE} = r - k$. Dunque il cerchio ha area:

$$A_1 = \pi(r - k)^2.$$

La sezione del piano con la scodella è una corona circolare di raggio esterno r e raggio interno EG. Per il teorema di Pitagora risulta:

$$\overline{EG}^2 = \overline{VG}^2 - \overline{VE}^2 = r^2 - (k - r)^2 = 2kr - k^2.$$

L'area della sezione con la scodella è:

$$A_2 = \pi[r^2 - (2kr - k^2)] = \pi(r - k)^2.$$

Per il principio di Cavalieri, poiché $A_1 = A_2$, possiamo concludere che la scodella e il cono sono equivalenti.