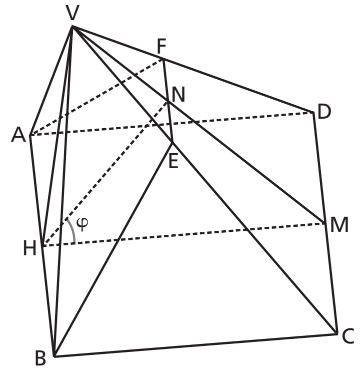
PROBLEMA 2

Una piramide ha per base il quadrato *ABCD* di lato lungo 7 cm. Anche l'altezza *VH* della piramide è lunga 7 cm e il suo piede *H* è il punto medio del lato *AB*. Condurre per la retta *AB* il piano α che formi con il piano della base della piramide un angolo φ tale che $\cos\varphi = \frac{3}{5}$ e indicare con *EF* la corda che il piano α intercetta sulla faccia *VCD* della piramide.

a) Spiegare perché il quadrilatero convesso *ABEF* è inscrivibile in una circonferenza γ.
b) Tale quadrilatero è anche circoscrivibile a una circonferenza?
c) Calcolare i volumi delle due parti in cui la piramide data è divisa dal piano α.
d) Dopo aver riferito il piano α a un conveniente sistema di assi cartesiani (*Oxy*), determinare l'equazione della circonferenza γ.

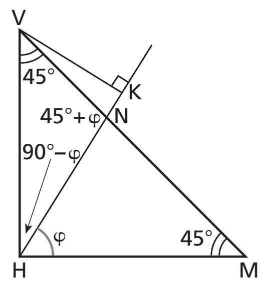
SOLUZIONE DELLA PROVA D'ESAME
CORSO DI ORDINAMENTO • 2004
Sessione suppletiva

PROBLEMA 2



▲ **Figura 5.**

a) Costruiamo la piramide e conduciamo per la retta *AB* il piano α. La retta *CD* non interseca il piano α e quindi nemmeno la retta *EF* (intersezione di α col piano della faccia *CDV*), perciò $CD \parallel EF$. Per ipotesi $CD \parallel AB$, quindi la corda *EF* è parallela anche ad *AB*: pertanto il quadrangolo convesso *ABEF* è un trapezio.
Per ipotesi la faccia *AVB* è un triangolo isoscele (l'altezza *VH* è mediana della base *AB*), quindi $VA \cong VB$. Per il primo criterio di congruenza le facce *ADV* e *BCV* sono triangoli rettangoli congruenti ($AD \cong BC$ per ipotesi, $VA \cong VB$, $DA \perp VA$, $BC \perp VB$ per il teorema delle tre perpendicolari) e anche la faccia *CDV* è un triangolo isoscele. Poiché *EF* è parallela a *CD* allora $VE \cong VF$, quindi, per il primo criterio di congruenza, il triangolo *AFV* è congruente al triangolo *BEV*, da cui $AF \cong BE$. Il trapezio *ABEF* è dunque isoscele e quindi inscrittibile in una circonferenza (un quadrangolo convesso con angoli opposti supplementari è inscrittibile in una circonferenza).



▲ **Figura 6.**

b) Condizione necessaria e sufficiente affinché un quadrilatero sia circoscrivibile a una circonferenza è che siano uguali le somme delle coppie di lati opposti. Nel nostro caso dobbiamo verificare se $\overline{AB}+\overline{EF}=\overline{AF}+\overline{BE}$.
Per determinare $\overline{EF}$ si osserva che i triangoli *VEF* e *VDC* sono simili; una volta determinato il rapporto di similitudine $\dfrac{\overline{VN}}{\overline{VM}}$ si può calcolare anche $\overline{EF}$. Studiamo quindi il triangolo *VHM*, riportato per comodità in figura 6: è un triangolo rettangolo isoscele, quindi $H\hat{V}M = H\hat{M}V = 45°$. Si ha poi $V\hat{H}N = 90° - \varphi$ e $V\hat{N}H = 45° + \varphi$.

Applichiamo il teorema dei seni al triangolo *VHN*:

$$\frac{\overline{VN}}{\operatorname{sen}(90° - \varphi)} = \frac{\overline{VH}}{\operatorname{sen}(45° - \varphi)}$$

da cui si ricava:

$$\overline{VN} = \frac{7\cos\varphi}{\operatorname{sen}45°\cos\varphi + \cos 45°\operatorname{sen}\varphi}.$$

Poiché per ipotesi $\cos\varphi = \dfrac{3}{5}$, si ha $\operatorname{sen}\varphi = \dfrac{4}{5}$, quindi:

$$\overline{VN} = \frac{7\cdot\dfrac{3}{5}}{\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{3}{5}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{4}{5}} = \frac{\dfrac{21}{5}}{7\dfrac{\sqrt{2}}{2}} = 3\sqrt{2}.$$

Essendo $\overline{VM} = 7\sqrt{2}$, il rapporto di similitudine $\dfrac{\overline{VN}}{\overline{VM}}$ è allora $\dfrac{3}{7}$, pertanto $\overline{EF} = \dfrac{3}{7}\overline{CD} = 3$ cm.

Calcoliamo infine $\overline{NH}$ mediante il teorema di Carnot:

$$NH = \sqrt{VN^2 + VH^2 - 2VN\cdot VH\cdot\cos\hat{V}} = 5\text{ cm}.$$

Affinché la relazione $\overline{AB}+\overline{EF}=\overline{AF}+\overline{BE}$ sia vera, dovrebbe essere $\overline{AF}=\dfrac{\overline{AB}+\overline{EF}}{2}=5\,\text{cm}$. Ma, ricordando che $\overline{AF}$ è un lato obliquo del trapezio isoscele $ABEF$ e che l'altezza del trapezio è $\overline{NH}=5\,\text{cm}$, deve essere $\overline{AF}>5\,\text{cm}$, quindi la relazione $\overline{AB}+\overline{EF}=\overline{AF}+\overline{BE}$ è falsa e il trapezio $ABEF$ non è circoscrivibile a una circonferenza.

c) La parte superiore è la piramide $ABEFV$ di base il trapezio isoscele $ABEF$ la cui altezza $\overline{VK}$, come si vede in figura 6, si ottiene proiettando il vertice V sul piano α, in particolare sulla retta per NH:

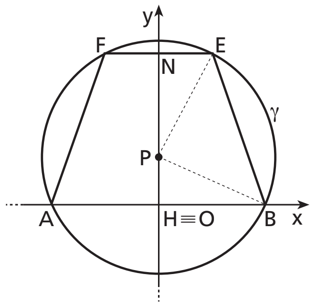
$\overline{VK}=\overline{VH}\cdot \operatorname{sen}(90°-\varphi)=7\cos\varphi=\dfrac{21}{5}\,\text{cm}$. Quindi il volume della piramide $ABEFV$ è:

$$V_{(ABEFV)}=\frac{1}{3}A_{(ABEF)}\cdot\overline{VK}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}(\overline{AB}+\overline{EF})\cdot\overline{HN}\cdot\frac{21}{5}\,\text{cm}=35\,\text{cm}^3.$$

Il volume della parte inferiore della piramide $ABCDV$ si ottiene per differenza:

$$V_{(ABCDEF)}=V_{(ABCDV)}-V_{(ABEFV)}=\frac{1}{3}A_{(ABCD)}\cdot\overline{VH}-35\,\text{cm}^3=\frac{343}{3}\text{cm}^3-35\,\text{cm}^3=\frac{238}{3}\text{cm}^3.$$

d) Scegliamo un sistema di riferimento di centro $O(0,0)\equiv H$, avente come asse x la retta per AB orientata da A verso B e come asse y la retta per HN orientata da H verso N come illustrato in figura 7.



▲ **Figura 7.**

Cerchiamo l'equazione della circonferenza γ passante per i punti $A\left(-\dfrac{7}{2},\,0\right)$, $B\left(+\dfrac{7}{2},\,0\right)$, $E\left(\dfrac{3}{2},\,5\right)$, $F\left(-\dfrac{3}{2},\,5\right)$, simmetrica rispetto all'asse y e che quindi ha centro $P(0,\,k)$. L'equazione della circonferenza rispetto al sistema di riferimento scelto è quindi $x^2+(y-k)^2=r^2$. Determiniamo k ed r.

Il centro $P(0,\,k)$ deve essere equidistante da B ed E:

$$\overline{PE}^2=\overline{PB}^2\Leftrightarrow\frac{9}{4}+(5-k)^2=\frac{49}{4}+k^2\Leftrightarrow k=\frac{3}{2}.$$

Quindi il centro ha coordinate $P\left(0,\,\dfrac{3}{2}\right)$ e $r^2=\overline{PE}^2=\dfrac{58}{4}$.

L'equazione di γ rispetto al sistema di riferimento scelto è $x^2+\left(y-\dfrac{3}{2}\right)^2=\dfrac{58}{4}$, che dopo alcuni calcoli diventa: $x^2+y^2-3y-\dfrac{49}{4}=0$.