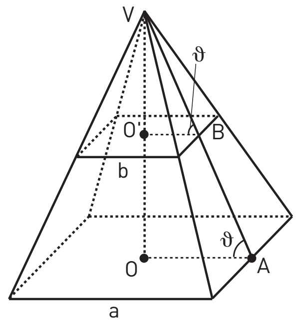
4 Di un tronco di piramide retta a base quadrata si conoscono l'altezza h e i lati a e b delle due basi. Si esprima il volume V del tronco in funzione di a, b e h, illustrando il ragionamento seguito.

4 Dato un tronco di piramide retta a base quadrata di altezza h e lati a e b delle due basi, prolunghiamo gli spigoli laterali in modo da ottenere due piramidi quadrate di vertice V. Indichiamo con O e O' i piedi delle altezze delle due piramidi generate. Tracciamo l'apotema VA e indichiamo con ϑ l'angolo $O\hat{A}V$ (figura 11).



▲ **Figura 11.**

Risulta:

$$OA = \frac{a}{2}, \quad O'B = \frac{b}{2}, \quad OV = \frac{a}{2}\operatorname{tg}\vartheta, \quad O'V = \frac{b}{2}\operatorname{tg}\vartheta.$$

Inoltre:

$$OV - O'V = h \;\rightarrow\; \frac{a}{2}\operatorname{tg}\vartheta - \frac{b}{2}\operatorname{tg}\vartheta = h \;\rightarrow\; \operatorname{tg}\vartheta = \frac{2h}{a-b}.$$

Riscriviamo OV e $O'V$ in funzione di a, b, h:

$$OV = \frac{ah}{a-b}, \quad O'V = \frac{bh}{a-b}.$$

Ricaviamo il volume V_T del tronco di cono come differenza tra i volumi delle due piramidi prima indicate:

$$V_T = \frac{1}{3}a^2 \cdot \frac{ah}{a-b} - \frac{1}{3}b^2 \cdot \frac{bh}{a-b} = \frac{1}{3}h \cdot \frac{a^3-b^3}{a-b}.$$

Sfruttiamo la scomposizione della differenza di cubi di monomi:

$$V_T = \frac{1}{3}h \cdot \frac{(a-b)(a^2+b^2+ab)}{a-b} = \frac{(a^2+b^2+ab)h}{3}.$$