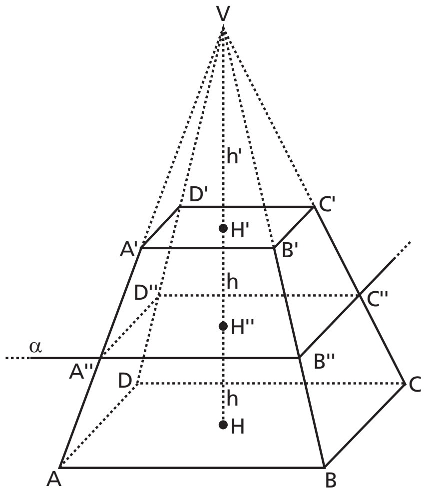
ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO DI ORDINAMENTO • 2005
Sessione straordinaria

1 Si considerino un tronco di piramide quadrangolare regolare, la cui base maggiore abbia area quadrupla della minore, e un piano α equidistante dalle basi del tronco. Dire se i dati sono sufficienti per calcolare il rapporto fra i volumi dei due tronchi in cui il tronco dato è diviso dal piano α.

SOLUZIONE DELLA PROVA D'ESAME
CORSO DI ORDINAMENTO • 2005
Sessione straordinaria

1 Nella figura 6 è rappresentato il tronco di piramide quadrangolare regolare la cui base maggiore $ABCD$ ha area S quadrupla della superficie S' della base minore $A'B'C'D'$. Il piano α è equidistante dalle basi del tronco per cui, indicata con $2h$ la misura dell'altezza HH', vale $\overline{HH''} = \overline{H''H'} = h$. Il piano intercetta sul tronco il quadrato $A''B''C''D''$ di area S''.



◀ **Figura 6.**

Prolungati gli spigoli laterali si trova il vertice V della corrispondente piramide di base $ABCD$. Indicata con h' la misura dell'altezza VH', poiché le aree delle superfici di base di due piramidi simili sono proporzionali ai quadrati delle misure delle rispettive altrezze, vale la seguente proporzione:

$$S : (h' + 2h)^2 = S' : h'^2.$$

Essendo $S = 4S'$ per ipotesi, la relazione sopra diventa:

$$4S' : (h' + 2h)^2 = S' : h'^2 \quad \rightarrow \quad \frac{h' + 2h}{h'} = 2 \quad \rightarrow \quad h' = 2h.$$

Utilizzando tale risultato e applicando lo stesso teorema riferito al piano α si trova:

$$S : (4h)^2 = S'' : (3h)^2 \quad \rightarrow \quad S'' = \frac{9}{16}S \quad \rightarrow \quad S'' = \frac{9}{16} \cdot 4S' = \frac{9}{4}S'.$$

Indicati con V_1 e V_2 i volumi dei tronchi di piramide, rispettivamente inferiore e superiore, in cui risulta diviso il tronco di partenza, essi possono essere calcolati con la formula generale del volume del tronco di piramide. In tal caso il loro rapporto ha espressione:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{1}{3}h(S + S'' + \sqrt{S \cdot S''})}{\frac{1}{3}h(S' + S'' + \sqrt{S' \cdot S''})}.$$

Per le relazioni trovate in precedenza si può scrivere:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\left(4S' + \frac{9}{4}S' + \sqrt{4S' \cdot \frac{9}{4}S'}\right)}{\left(S' + \frac{9}{4}S' + \sqrt{S' \cdot \frac{9}{4}S'}\right)} = \frac{4 + \frac{9}{4} + 3}{1 + \frac{9}{4} + \frac{3}{2}} = \frac{37}{19}.$$

Pertanto i dati sono sufficienti per calcolare tale rapporto.

