PROBLEMA 2

ABC è un triangolo rettangolo di ipotenusa BC.

1. Dimostrate che la mediana relativa a BC è congruente alla metà di BC.
2. Esprimete le misure dei cateti di ABC in funzione delle misure, supposte assegnate, dell'ipotenusa e dell'altezza ad essa relativa.
3. Con $BC = \sqrt{3}$ *metri*, determinate il cono K di volume massimo che si può ottenere dalla rotazione completa del triangolo attorno ad uno dei suoi cateti e la capacità in *litri* di K.
4. Determinate la misura approssimata, in radianti ed in gradi sessagesimali, dell'angolo del settore circolare che risulta dallo sviluppo piano della superficie laterale del cono K.

PROBLEMA 2

1) Poiché ABC è un triangolo rettangolo è inscrivibile in una semicirconferenza con l'ipotenusa come diametro; pertanto la mediana relativa all'ipotenusa sarà un raggio della semicirconferenza e come tale metà del diametro, ovvero dell'ipotenusa.

2) Indicati, per brevità con i l'ipotenusa BC, con h l'altezza relativa all'ipotenusa si può scrivere la seguente uguaglianza:
il prodotto dei cateti è uguale al prodotto dell'ipotenusa per l'altezza ad essa relativa; inoltre vale il teorema di Pitagora; ponendo a sistema le due uguaglianze si ottiene il seguente sistema simmetrico:

$$\begin{cases} AB \cdot AC = h \cdot i & (1) \\ AB^2 + AC^2 = i^2 & (2) \end{cases}$$

La (2) può essere riscritta come $(AB + AC)^2 - 2AB \cdot AC = i^2$ in cui si può sostituire ad $AB \cdot AC$ il valore fornito dalla (1), portare tale termine al secondo membro, estrarre la radice quadrata di entrambi i membri e considerare la sola radice positiva, in quanto la somma di segmenti è positiva; il sistema pertanto diventa:

$$\begin{cases} AB \cdot AC = hi & (1) \\ AB + AC = \sqrt{i^2 + 2hi} & (2) \end{cases}$$

Come per tutti i sistemi simmetrici le soluzioni sono rappresentate dalle radici dell'equazione: $t^2 - st + p = 0$, con s somma delle incognite e p prodotto; in questo caso diventa:
$t^2 - t\sqrt{i^2 + 2hi} + hi = 0$; indicato con AC il cateto maggiore le soluzioni saranno:

$$AC = \frac{\sqrt{i^2 + 2hi} + \sqrt{i^2 - 2hi}}{2} \quad \text{e} \quad AB = \frac{\sqrt{i^2 + 2hi} - \sqrt{i^2 - 2hi}}{2}$$

3) Se si indica con x uno dei due cateti, ad esempio AB l'altro sarà $AC = \sqrt{3 - x^2}$; poiché il volume del cono dipende dal quadrato del raggio della base sarà conveniente usare AC come raggio e AB come altezza del cono; il volume di K pertanto sarà:

$$V_K = \frac{\pi \cdot AC^2 \cdot AB}{3} = \frac{\pi \cdot (3 - x^2) \cdot x}{3} = \frac{\pi}{3}(3x - x^3)\ m^3$$

Per cercare il cono di volume massimo occorre uguagliare a zero la derivata prima del volume rispetto alla variabile x; si ottengono così due valori: $x = -1$ e $x = 1$, dove, essendo x la misura di un segmento, solo la soluzione positiva ha significato geometrico.

Se $AB = 1$ allora $AC = \sqrt{2}$ e $V_K = \frac{2}{3}\pi\ m^3$; ma un litro corrisponde ad un dm^3 e pertanto:

$$V_K = \frac{2 \cdot 10^3}{3}\pi \quad \textit{litri}$$

4) La misura di un angolo in radianti è pari al rapporto tra la lunghezza dell'arco e il raggio; lo sviluppo piano della superficie laterale del cono K origina un settore circolare compreso tra un arco, la cui misura è pari alla misura della circonferenza della base di $K\,(2\sqrt{2}\pi)$, e due raggi che misurano quanto l'apotema del cono K, ovvero $\sqrt{3}$. Pertanto l'angolo α sarà:

$$\alpha = \frac{2\sqrt{2}\pi}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3}\sqrt{6}\pi \approx 5{,}1 \text{ radianti o, in gradi sessagesimali, } \alpha_g = \frac{2}{3}\sqrt{6} \cdot 180° \approx 293°56'19''$$