ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO DI ORDINAMENTO • 2001
Sessione ordinaria

4 Un tronco di piramide ha basi di aree B e b ed altezza h. Dimostrare, col metodo preferito, che il suo volume V è espresso dalla seguente formula:

$$V = \frac{1}{3} h (B + b + \sqrt{Bd}).$$

In ogni caso esplicitare ciò che si ammette ai fini della dimostrazione.

4 Si prolunghino gli spigoli laterali del tronco di piramide di base, per esempio, triangolare (figura 9) e si tracci l'altezza OH della piramide ottenuta. Si assuma $\overline{OH} = h'$.
Nota l'espressione del volume di una piramide, il volume del tronco di piramide si calcola come la differenza dei volumi delle piramidi di vertice O e basi coincidenti con quelle del tronco. Pertanto:

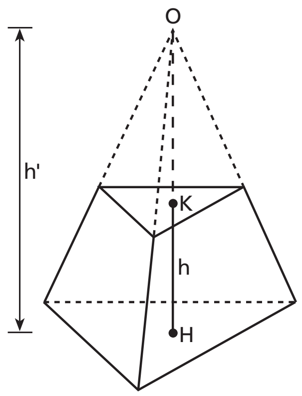
$$V = \frac{1}{3} B \cdot h' - \frac{1}{3} b \cdot (h' - h) = \frac{1}{3}[h'(B - b) + bh].$$

Ricordando il teorema relativo alle sezioni parallele di una piramide, in cui le aree delle sezioni sono direttamente proporzionali ai quadrati delle loro distanze dal vertice della piramide, si può scrivere: $B : b = h'^2 : (h' - h)^2$ e, estraendo la radice quadrata, $\sqrt{B} : \sqrt{b} = h' : (h' - h)$.
Da quest'ultima relazione si ricava h':

$$h' = \frac{h}{1 - \sqrt{\frac{b}{B}}} = \frac{h\sqrt{B}}{\sqrt{B} - \sqrt{b}} = h\,\frac{B + \sqrt{Bb}}{B - b}\,.$$

Infine, si sostituisce tale risultato nell'espressione del volume:

$$V = \frac{1}{3}[h'(B - b) + bh] = \frac{1}{3}[h(B + \sqrt{Bb}) + bh] = \frac{1}{3}h(B + b + \sqrt{Bb}).$$



▲ **Figura 9.**