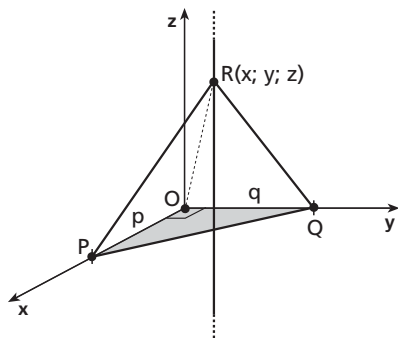


**ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. • 2011**

- 9** Si provi che, nello spazio ordinario a tre dimensioni, il luogo geometrico dei punti equidistanti dai tre vertici di un triangolo rettangolo è la retta perpendicolare al piano del triangolo passante per il punto medio dell'ipotenusa.

SOLUZIONE DELLA PROVA D'ESAME CORSO SPERIMENTALE P.N.I. • 2011

9 Studiamo il problema secondo un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy (figura 14).



◀ **Figura 14.**

Il triangolo rettangolo POQ è retto in O , appartiene al piano $z=0$ e ha vertici di coordinate $P(p; 0; 0)$, $Q(0; q; 0)$.

Sia $R(x; y; z)$ un punto dello spazio che soddisfi le proprietà del luogo geometrico $\overline{RP} = \overline{RO} = \overline{RQ}$; risulta:

$$\sqrt{(x-p)^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{x^2 + (y-q)^2 + z^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Elevando al quadrato i membri delle uguaglianze e sviluppando i prodotti notevoli, otteniamo:

$$x^2 - 2px + p^2 + y^2 + z^2 = x^2 + y^2 - 2qy + q^2 + z^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

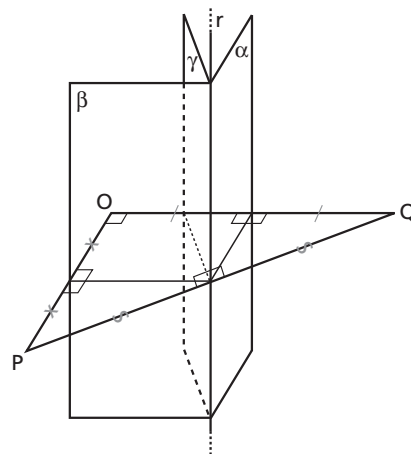
La doppia uguaglianza è equivalente al sistema:

$$\begin{cases} -2px + p^2 = -2qy + q^2 \\ -2qy + q^2 = 0 \\ -2px + p^2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{p}{2} \\ y = \frac{q}{2} \end{cases}$$

Le soluzioni del sistema, luogo geometrico richiesto, rappresentano le equazioni della retta perpendicolare al piano $z=0$ del triangolo, passante per il punto medio $\left(\frac{p}{2}; \frac{q}{2}; 0\right)$ dell'ipotenusa PQ del triangolo stesso.

Osserviamo che il problema poteva essere risolto attraverso la geometria euclidea dimostrativa (figura 15).

Infatti, se consideriamo un lato del triangolo, per esempio OQ , il luogo geometrico dei punti equidistanti dai punti O e Q è il piano assiale α , ovvero il piano perpendicolare a OQ e passante per il suo punto medio. In maniera analoga si individuano i piani assiali β e γ per i restanti lati OP e PQ . L'intersezione di questi tre piani è una retta r , perpendicolare al piano del triangolo e passante per il punto medio dell'ipotenusa PQ . Tale retta è pertanto il luogo dei punti equidistanti dai vertici del triangolo rettangolo.



▲ **Figura 15.**