

ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. • 2002
Sessione ordinaria

■ **PROBLEMA 2**

I raggi $\overline{OA} = \overline{OB} = 1$ metro tagliano il cerchio di centro O in due settori circolari, ciascuno dei quali costituisce lo sviluppo della superficie laterale di un cono circolare retto.

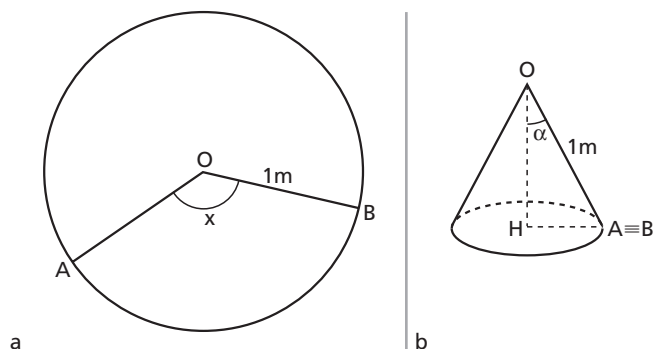
Si chiede di determinare:

- a) il settore circolare (arco, ampiezza e rapporto percentuale con il cerchio) al quale corrisponde il cono C di volume massimo, il valore V di tale volume massimo e il valore V' assunto in questo caso dal volume del secondo cono C' ;
- b) la capacità complessiva, espressa in litri, di C e di C' ;
- c) un'approssimazione della misura, in gradi sessagesimali, dell'angolo di apertura del cono C , specificando il metodo numerico che si utilizza per ottenerla.

SOLUZIONE DELLA PROVA D'ESAME
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. • 2002
Sessione ordinaria

PROBLEMA 2

- a) Considerato il cerchio di centro O e raggio pari a 1 m, lo si tagli in due settori circolari con angoli rispettivamente x e $2\pi - x$ (figura 3a). Unendo fra loro i segmenti OA e OB si ricavano due coni di apotema uguale a 1 m e circonferenza di base pari all'arco \widehat{AOB} del corrispondente settore circolare ottenuto dal cerchio di partenza (figura 3b).



◀ **Figura 3.**

Il volume V del cono C (figura 3b), corrispondente al settore circolare di ampiezza x , è $V = \frac{1}{3} \pi \overline{AH}^2 \cdot \overline{OH}$.

Ora, \overline{AH} è il raggio della circonferenza la cui lunghezza è pari all'arco \widehat{AOB} . Poiché un arco di una circonferenza è dato dal prodotto del raggio per l'angolo corrispondente espresso in radianti, si ha

$$\widehat{AOB} = 1 \cdot x = x; \text{ pertanto } \overline{AH} = \frac{\widehat{AOB}}{2\pi} \rightarrow \overline{AH} = \frac{x}{2\pi}. \text{ Applicando il teorema di Pitagora si trova}$$

$$\overline{OH} = \sqrt{\overline{OA}^2 - \overline{AH}^2} \text{ ovvero } \overline{OH} = \sqrt{1 - \frac{x^2}{4\pi^2}}.$$

Il volume del cono C risulta quindi:

$$V = \frac{1}{3} \pi \frac{x^2}{4\pi^2} \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{4\pi^2}} = \frac{x^2}{24\pi^2} \sqrt{4\pi^2 - x^2}. \quad (1)$$

Si studiano gli estremanti della funzione $V(x) = \frac{x^2}{24\pi^2} \sqrt{4\pi^2 - x^2}$ per $x \in [0; 2\pi]$, considerando il segno

della derivata prima. Poiché $V' = \frac{x(8\pi^2 - 3x^2)}{24\pi^2 \sqrt{4\pi^2 - x^2}}$ e tenendo conto dell'intervallo di definizione di

x , la derivata è positiva per $0 < x < \sqrt{\frac{8}{3}} \pi$, nulla per $x = \sqrt{\frac{8}{3}} \pi$ e negativa per $\sqrt{\frac{8}{3}} \pi < x < 2\pi$.

Quindi il volume del cono C è massimo per il settore circolare di ampiezza $x = \sqrt{\frac{8}{3}} \pi$.

L'arco corrispondente ha lunghezza $\widehat{AOB} = \sqrt{\frac{8}{3}} \pi$ m; il rapporto percentuale con il cerchio vale:

$$\frac{\sqrt{\frac{8}{3}} \pi}{2\pi} = \sqrt{\frac{2}{3}} \approx 81,6\%.$$

Il volume massimo del cono C risulta: $V_{\max} = \frac{\frac{8}{3}\pi^2}{24\pi^2} \sqrt{4\pi^2 - \frac{8}{3}\pi^2} = \frac{2\sqrt{3}}{27}\pi m^3$.

Si calcola ora il volume del cono C' dalla formula (1), assegnando a x il valore $2\pi - \sqrt{\frac{8}{3}}\pi$.

$$\begin{aligned} V' &= \frac{\left(2\pi - \sqrt{\frac{8}{3}}\pi\right)^2}{24\pi^2} \sqrt{4\pi^2 - \left(2\pi - \sqrt{\frac{8}{3}}\pi\right)^2} \\ &= \frac{5 - 2\sqrt{6}}{18} \cdot 2\pi \sqrt{\frac{2\sqrt{6} - 2}{3}} = \frac{5 - 2\sqrt{6}}{9} \sqrt{\frac{2\sqrt{6} - 2}{3}} \pi m^3. \end{aligned}$$

b) Utilizzando l'equivalenza tra litri e m^3 , ovvero $1 m^3 = 1000 l$, si ricava:

$$V \approx 0,40307 m^3 = 403,07 l;$$

$$V' \approx 0,03466 m^3 = 34,66 l.$$

Pertanto la capacità complessiva dei due coni è uguale a $403,07 l + 34,66 l = 437,73 l$.

c) Osservando la figura 2b il cono C ha angolo di apertura $\alpha = \arcsen \frac{\overline{AH}}{\overline{OA}} = \arcsen \overline{AH}$ (perché $\overline{OA} = 1$).

Nella risoluzione del punto a) del problema si era determinato $\overline{AH} = \frac{x}{2\pi}$.

Poiché $x = \sqrt{\frac{8}{3}}\pi$, risulta $\overline{AH} = \sqrt{\frac{2}{3}}$. Pertanto $\alpha = \arcsen \sqrt{\frac{2}{3}}$.

Se si vuole esprimere l'angolo in gradi sessagesimali, basta utilizzare la calcolatrice scientifica nella modalità DEG e calcolare il valore attraverso il tasto della funzione arcoseno di cui l'apparecchio è comunemente provvisto. Si trova: $\alpha^\circ = 54,73561032^\circ \approx 54^\circ 44' 8''$.

Un calcolo approssimato dell'angolo α , il cui seno vale $\sqrt{\frac{2}{3}}$, può essere compiuto cercando la radice dell'equazione $\sin x - \sqrt{\frac{2}{3}} = 0$ nell'intervallo $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. La funzione $f(x) = \sin x - \sqrt{\frac{2}{3}}$ è continua e

strettamente crescente e assume agli estremi dell'intervallo valori di segno opposto. Pertanto la funzione ammette un unico zero. Per determinare tale valore, si utilizza il metodo delle tangenti. Poiché $f''(x) = \sin x$ è sempre negativa nell'intervallo e $f(0) < 0$, si utilizza come ascissa iniziale $x = 0$. Si costruisce la tabella con la formula di ricorrenza delle tangenti compiendo 6 passi.

n	x_n (RAD)	x_n (°)
0	0,00000	0,000000
1	0,81650	46,7818081
2	0,94463	54,1235068
3	0,95524	54,7310780
4	0,95532	54,7356101
5	0,95532	54,7356103
6	0,95532	54,7356103

Si osserva che il valore trovato, cioè $\alpha^\circ \approx 54,73561^\circ$, ha cifre certe fino alla quinta cifra dopo la virgola.