

**ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO DI ORDINAMENTO • 2007**

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.

- 7** Se $f(x)$ è una funzione reale dispari (ossia il suo grafico cartesiano è simmetrico rispetto all'origine), definita e integrabile nell'intervallo $[-2; 2]$, che dire del suo integrale esteso a tale intervallo? Quanto vale nel medesimo intervallo l'integrale della funzione $3 + f(x)$?

SOLUZIONE DELLA PROVA D'ESAME CORSO DI ORDINAMENTO • 2007

7 Per definizione, se la funzione $f(x)$ è dispari si ha che $f(-x) = -f(x)$ per ogni x nel dominio di $f(x)$ ed in particolare per $-2 \leq x \leq 2$. Utilizzando l'additività dell'integrale, si può scrivere:

$$\int_{-2}^2 f(x) dx = \int_{-2}^0 f(x) dx + \int_0^2 f(x) dx.$$

Inoltre:

$$\int_{-2}^0 f(x) dx = - \int_0^{-2} f(x) dx = \int_0^{-2} [-f(x)] dx.$$

La disparità di $f(x)$ implica:

$$\int_0^{-2} [-f(x)] dx = \int_0^{-2} f(-x) dx.$$

Se si effettua il cambio di variabile $t = -x$, l'ultimo integrale diventa

$$\int_0^{-2} f(-x) dx = - \int_0^2 f(t) dt$$

pertanto

$$\int_{-2}^2 f(x) dx = - \int_0^2 f(x) dx + \int_0^2 f(x) dx = 0.$$

Per la linearità dell'integrale, si ha:

$$\int_{-2}^2 (f(x) + 3) dx = \int_{-2}^2 f(x) dx + 3 \int_{-2}^2 dx = 0 + [3x]_{-2}^2 = 12.$$