8 È data la funzione $f(x)$ continua su tutto $\mathbb{R}$ e della quale si sa che:

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \alpha, \qquad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Per quali valori reali di $k \neq 0$ è possibile calcolare l'integrale $\int_0^k f\left(\frac{x}{k}\right)dx$? Fornisci un esempio.

8 Calcoliamo l'integrale incognito col metodo della sostituzione:

$$\frac{x}{k} = t \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x = 0 \\ t = 0 \end{cases}, \begin{cases} x = k \\ t = 1 \end{cases}, \quad dx = k\,dt, \qquad \text{pertanto}$$

$$\int_0^k f\left(\frac{x}{k}\right) dx = k \int_0^1 f(t)\, dt = k\alpha, \quad \forall k \neq 0.$$

Un esempio semplice è il seguente:

$$\int_0^1 (x - x^2)\, dx = \frac{1}{6}; \quad k = 3 \rightarrow \int_0^3 \left(\frac{x}{3} - \frac{x^2}{9}\right) dx = \left[\frac{x^2}{6} - \frac{x^3}{27}\right]_0^3 = \ldots = \frac{1}{2} = 3 \int_0^1 (x - x^2)\, dx.$$