7 Spiegare in maniera esauriente perché una funzione reale di variabile reale integrabile in un intervallo chiuso e limitato [a; b] non necessariamente ammette primitiva in [a; b].

7 Data una funzione $f(x)$ continua in un intervallo chiuso e limitato $[a; b]$, si chiama primitiva di $f(x)$ in $[a; b]$ ogni funzione $F(x)$, continua e derivabile nell'intervallo, tale che $F'(x) = f(x)$.

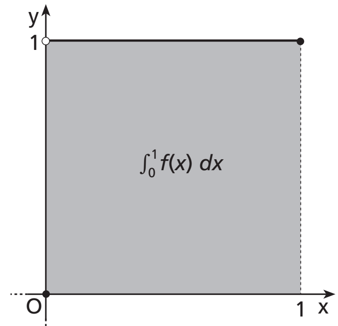
Si definisce funzione integrale di $f(x)$ la funzione $\int_a^x f(t)\,dt$, con $x \in [a; b]$, ottenuta secondo la definizione di integrale definito e la funzione $f(x)$ si dice integrabile in $[a; b]$. Si dimostra che ogni funzione continua in un intervallo è in esso integrabile e il teorema fondamentale del calcolo integrale afferma che la funzione $\int_a^x f(t)\,dt$ è una funzione primitiva di $f(x)$, ovvero, posto $F'(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, risulta $F'(x) = f(x)$.

Ora, l'integrabilità di una funzione può essere estesa al caso di una funzione con un numero finito di punti di discontinuità. Ad esempio se $f(x)$, definita in $[a; b]$, ha un punto di discontinuità in $x = c$ interno all'intervallo, ed esistono finiti $\lim_{t \to c^-} \int_a^t f(x)\,dx$ e $\lim_{t \to c^+} \int_t^b f(x)\,dx$, allora la funzione è integrabile in senso improprio su $[a; b]$ e vale:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t \to c^-} \int_a^t f(x)\,dx + \lim_{t \to c^+} \int_t^b f(x)\,dx.$$

Consideriamo la funzione $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0 \\ 1 & \text{se } 0 < x \leq 1 \end{cases}$. In base alla definizione di integrale definito essa è integrabile nell'intervallo $[0; 1]$ e risulta:

$$\int_0^1 f(x)\,dx = 1.$$



▲ **Figura 9.**

La funzione però non ammette primitiva in tale intervallo. Infatti una sua eventuale primitiva nell'intervallo aperto a sinistra $]0; 1]$ dovrebbe essere del tipo:

$F(x) = x + c, \quad x \in]0; 1], \; c \in \mathbb{R}$ (costante reale indeterminata).

Definiamo $F(0)$ rispettando la necessaria continuità di F:

$$F(0) = \lim_{x \to 0^+} (x + c) = c.$$

Dunque:

$$F(x) = x + c \quad \forall x \in [0; 1], \; c \in \mathbb{R} \quad \text{quindi} \quad F'(x) = 1 \quad \forall x \in [0; 1].$$

D'altra parte dovendo essere $F'(0) = f(0)$ si avrebbe $1 = 0$: f non ammette dunque primitiva.