ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. • 2009

1 Siano: $0 < a < b$ e $x \in [-b;\, b]$. Si provi che $\int_{-b}^{b} |x - a|\, dx = a^2 + b^2$.

SOLUZIONE DELLA PROVA D'ESAME
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. • 2009

1 La funzione integranda è definita per casi:

$$y=\begin{cases} x-a & \text{se } x\geq a \\ -x+a & \text{se } x<a \end{cases}$$

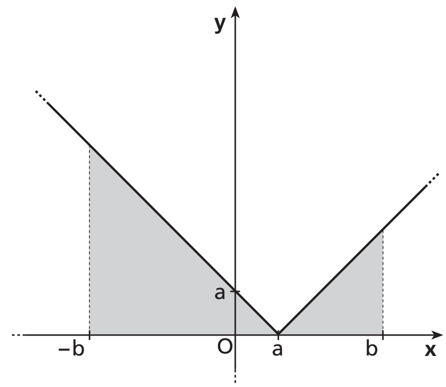
e ha il grafico riportato in figura 14.

Applicando la proprietà additiva degli integrali, risulta:

$$\int_{-b}^{b}|x-a|dx=\int_{-b}^{a}(-x+a)dx+\int_{a}^{b}(x-a)dx=$$

$$=\left[-\frac{x^2}{2}+ax\right]_{-b}^{a}+\left[\frac{x^2}{2}-ax\right]_{a}^{b}=$$

$$=-\frac{a^2}{2}+a^2+\frac{b^2}{2}+ab+\frac{b^2}{2}-ab-\frac{a^2}{2}+a^2=a^2+b^2.$$



▶ **Figura 14.**

Una dimostrazione alternativa si ottiene osservando che l'integrale richiesto è equivalente alla somma delle aree dei due triangoli evidenziati in figura. Entrambi i triangoli sono rettangoli e isosceli, con cateti di lunghezza $(b-a)$ e $(b+a)$, rispettivamente, pertanto vale:

$$\int_{-b}^{b}|x-a|dx=\frac{(b-a)^2}{2}+\frac{(b+a)^2}{2}=a^2+b^2.$$