ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. • 2012

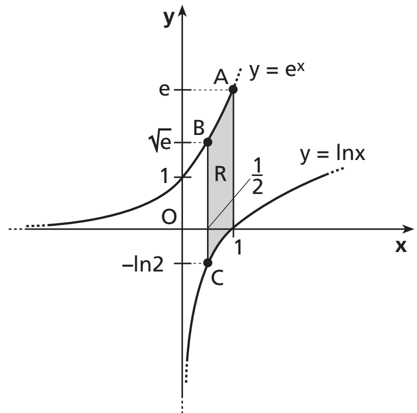
PROBLEMA 2

Siano f e g le funzioni definite da $f(x) = e^x$ e $g(x) = \ln x$.

1. Fissato un sistema cartesiano Oxy, si disegnino i grafici di f e g e si calcoli l'area della regione R che essi delimitano tra $x = \frac{1}{2}$ e $x = 1$.
2. La regione R, ruotando attorno all'asse x, genera il solido S e, ruotando intorno all'asse y, il solido T. Si scrivano, spiegandone il perché, ma senza calcolarli, gli integrali definiti che forniscono i volumi di S e di T.
3. Fissato $x_0 > 0$, si considerino le rette r e s tangenti ai grafici di f e di g nei rispettivi punti di ascissa x_0. Si dimostri che esiste un solo x_0 per il quale r e s sono parallele. Di tale valore x_0 si calcoli un'approssimazione arrotondata ai centesimi.
4. Sia $h(x) = f(x) - g(x)$. Per quali valori di x la funzione $h(x)$ presenta, nell'intervallo chiuso $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$, il minimo e il massimo assoluti? Si illustri il ragionamento seguito.

PROBLEMA 2

1. Le funzioni $f(x) = e^x$ e $g(x) = \ln x$ sono rispettivamente la funzione esponenziale e logaritmica in base e. Nella figura 4 è rappresentata la regione di piano R delimitata dalle due funzioni e da $x = \frac{1}{2}$ e $x = 1$. Il punto A ha coordinate $x_A = 1$ e $y_A = f(1) = e$, il punto B, $x_B = \frac{1}{2}$ e $y_B = f\left(\frac{1}{2}\right) = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$, il punto C, $x_C = \frac{1}{2}$ e $y_C = g\left(\frac{1}{2}\right) = \ln\frac{1}{2} = -\ln 2$.



▲ **Figura 4.**

Determiniamo l'area della regione R calcolando il seguente integrale:

$$\mathcal{A}(R) = \int_{\frac{1}{2}}^{1} (e^x - \ln x)dx = \int_{\frac{1}{2}}^{1} e^x dx - \int_{\frac{1}{2}}^{1} (\ln x)dx =$$

$$= [e^x]_{\frac{1}{2}}^{1} - \int_{\frac{1}{2}}^{1} (\ln x)dx = e - \sqrt{e} - \int_{\frac{1}{2}}^{1} (\ln x)dx =$$

integriamo per parti l'integrale dell'ultimo membro:

$$= e - \sqrt{e} - [x \ln x]_{\frac{1}{2}}^{1} + \int_{\frac{1}{2}}^{1} x \cdot \frac{1}{x} dx = e - \sqrt{e} - \left(0 - \frac{1}{2} \cdot \ln\frac{1}{2}\right) + [x]_{\frac{1}{2}}^{1} =$$

$$= e - \sqrt{e} - \frac{1}{2} \cdot \ln 2 + 1 - \frac{1}{2} =$$

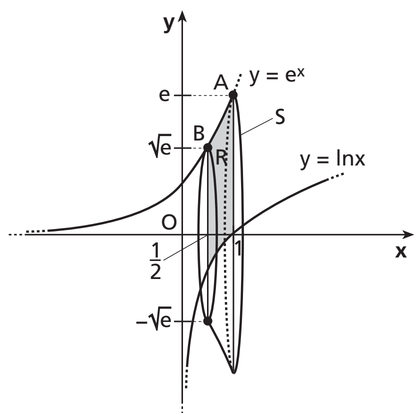
$$= e - \sqrt{e} - \ln\sqrt{2} + \frac{1}{2}.$$

2. Ruotiamo la regione R intorno all'asse x (figura 5).
Il solido S che si ottiene è equivalente al solido ottenuto dalla rotazione dalla regione delimitata dalla funzione $f(x) = e^x$, dall'asse x e dalle rette $x = \frac{1}{2}$ e $x = 1$ (la limitazione data da $y = \ln x$ è inessenziale). Pertanto il volume del solido S vale:

$$V(S) = \pi \int_{\frac{1}{2}}^{1} [f(x)]^2 dx = \pi \int_{\frac{1}{2}}^{1} e^{2x} dx.$$

Scomponiamo la regione R nelle tre zone R_1, R_2, R_3 e facciamole ruotare intorno all'asse y (figura 6).
Si ottengono tre solidi di rotazione T_1, T_2, T_3 la cui somma è equivalente al solido T di rotazione richiesto. Pertanto vale:

$$V(T) = V(T_1) + V(T_2) + V(T_3).$$



▲ **Figura 5.**

Calcoliamo $V(T_1)$ come differenza tra il volume del cilindro di raggio di base 1 e altezza $e - \sqrt{e}$ e il volume di rotazione della funzione inversa di $y = e^x$ ovvero $x = \ln y$ con $y \in [\sqrt{e}; e]$:

$$V(T_1) = \pi \cdot 1^2 \cdot (e - \sqrt{e}) - \pi \int_{\sqrt{e}}^{e} (\ln y)^2 dy =$$

$$= \pi(e - \sqrt{e}) - \pi \int_{\sqrt{e}}^{e} (\ln y)^2 \, dy.$$

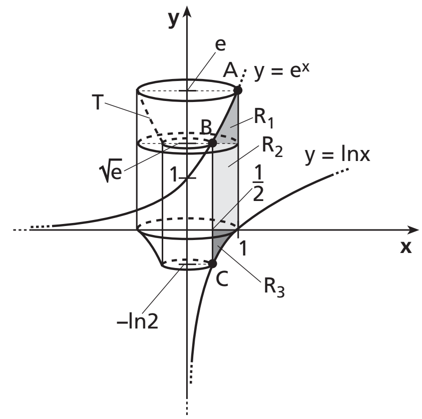
Determiniamo $V(T_2)$ come differenza di volume tra due cilindri di altezza $\sqrt{e}$ e raggi di base pari a 1 e $\frac{1}{2}$:

$$V(T_2) = \pi \cdot 1^2 \cdot \sqrt{e} - \pi \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \sqrt{e} = \frac{3}{4}\pi\sqrt{e}.$$

Calcoliamo $V(T_3)$ come differenza tra il volume di rotazione della funzione inversa di $y = \ln x$ ovvero

$x = e^y$ nell'intervallo $[-\ln 2; 0]$ e il cilindro di raggio $\frac{1}{2}$ e altezza $\ln 2$:

$$V(T_3) = \pi \int_{-\ln 2}^{0} e^{2y} \, dy - \pi \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \ln 2 = \pi \int_{-\ln 2}^{0} e^{2y} \, dy - \frac{1}{4}\pi \ln 2.$$



▲ **Figura 6.**

Pertanto il volume del solido T vale:

$$V(T) = V(T_1) + V(T_2) + V(T_3) = \pi(e - \sqrt{e}) - \pi \int_{\sqrt{e}}^{e} (\ln y)^2 \, dy + \frac{3}{4}\pi\sqrt{e} + \pi \int_{-\ln 2}^{0} e^{2y} \, dy - \frac{1}{4}\pi \ln 2 =$$

$$= \pi\left(e - \frac{1}{4}\sqrt{e} - \frac{1}{4}\ln 2\right) - \pi \int_{\sqrt{e}}^{e} (\ln y)^2 \, dy + \pi \int_{-\ln 2}^{0} e^{2y} \, dy.$$

3. Il coefficiente angolare di una retta tangente al grafico di una funzione derivabile in un suo punto x_0, quando la tangente esiste e non è parallela all'asse y, è uguale alla sua derivata prima in quel punto. Fissato $x_0 > 0$, si considerino le rette r e s tangenti ai grafici di $f(x) = e^x$ e $g(x) = \ln x$ nei rispettivi punti di ascissa x_0. Affinché le rette siano parallele i coefficienti angolari devono essere uguali cioè:

$$f'(x_0) = g'(x_0) \to e^{x_0} = \frac{1}{x_0}.$$

Per dimostrare l'unicità di x_0 che rende vera l'uguaglianza consideriamo la funzione $t(x) = e^x - \frac{1}{x}$ per $x > 0$. La derivata prima è $t'(x) = e^x + \frac{1}{x^2}$ pertanto la funzione è sempre crescente.

Inoltre $t\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{e} - 2 = -0{,}35\ldots < 0$, mentre $t\left(\frac{2}{3}\right) = \sqrt[3]{e^2} - \frac{3}{2} = 0{,}44\ldots > 0$. Si deduce per il primo teorema di unicità dello zero che esiste un solo valore $x_0 \in \left]\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right[$ che rende nulla la funzione.

La derivata seconda è $t''(x) = e^x - \frac{2}{x^3}$: essa è crescente, $t''\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{e} - 16 = -14{,}35\ldots$, $t''\left(\frac{2}{3}\right) = \sqrt[3]{e^2} - \frac{27}{4} = -4{,}80\ldots$, per cui in tale intervallo essa è continua e mantiene costante il suo segno.

Possiamo così applicare il metodo numerico delle tangenti per ricavare lo zero x_0 della funzione di partenza $t(x) = e^x - \frac{1}{x}$.

Ricordiamo la formula di ricorrenza di tale metodo e compiliamo la tabella sapendo che il punto di partenza della successione approssimante è l'estremo dell'intervallo in cui la funzione ha lo stesso segno della derivata seconda:

$$x_1 = \frac{1}{2},$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{t(x_n)}{t'(x_n)} \to x_{n+1} = x_n - \frac{e^{x_n} - \frac{1}{x_n}}{e^{x_n} + \frac{1}{x_n^2}}.$$

n	x_n	$t(x_n) = e^{x_n} - \frac{1}{x_n}$	$t'(x_n) = e^{x_n} + \frac{1}{x_n^2}$	$x_{n+1} - x_n$
1	0,500	− 0,351	5,649	
2	0,562	− 0,024	4,919	0,062
3	0,567	0,000	4,872	0,005

Dalla tabella osserviamo che il valore cercato approssimato ai centesimi è $x_0 \simeq 0{,}56$.

4. Consideriamo la funzione $h(x) = e^x - \ln x$ nell'intervallo $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$: essa è continua pertanto per il teorema di Weierstrass ammette massimo e minimo assoluti. Valutiamo i suoi valori agli estremi:

$$h\left(\frac{1}{2}\right) = e^{\frac{1}{2}} - \ln\frac{1}{2} = \sqrt{e} + \ln 2 \simeq 2{,}342,$$

$$h(1) = e - \ln 1 = e \simeq 2{,}718.$$

Calcoliamo la derivata prima:

$$h'(x) = e^x - \frac{1}{x}.$$

Nel punto precedente del problema abbiamo dimostrato che questa funzione ammette un solo zero nel punto $x_0 \simeq 0{,}56$, pertanto x_0 è un punto stazionario per $h(x)$. Inoltre $h'\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{e} - 2 < 0$ e $h'(1) = e - 1 > 0$, quindi x_0 è un punto di minimo relativo. Valutiamo il valore approssimato della funzione in tale punto:

$$h(x_0) = e^{x_0} - \ln x_0 \simeq e^{0{,}56} - \ln 0{,}56 \simeq 2{,}330.$$

Confrontando tale valore con $h\left(\frac{1}{2}\right) \simeq 2{,}342$, si può concludere che la funzione $h(x)$ ha massimo assoluto per $x = 1$ e minimo assoluto per $x = x_0$.