8 Sia $f(x)$ una funzione continua per ogni x reale tale che $\int_0^2 f(x)dx = 4$. Dei seguenti integrali:

$$\int_0^1 f(2x)dx \quad \text{e} \quad \int_0^1 f\left(\frac{x}{2}\right)dx$$

se ne può calcolare uno solo in base alle informazioni fornite. Dire quale e spiegarne la ragione.

8 Dato l'integrale $\int_0^1 f(2x)dx$, si considera la sostituzione $t = 2x$, ovvero $x = \frac{1}{2}t$, da cui si ricava il differenziale $dx = \frac{1}{2}dt$. Gli estremi di integrazione diventano: $t_1 = 2 \cdot 0 = 0$ e $t_2 = 2 \cdot 1 = 2$.

Sostituendo si trova:

$$\int_0^1 f(2x)dx = \frac{1}{2}\int_0^2 f(t)dt.$$

Utilizzando il dato di partenza, $\int_0^2 f(x)dx = 4$, risulta:

$$\int_0^1 f(2x)dx = \frac{1}{2}\int_0^2 f(t)dt = \frac{4}{2} = 2.$$

Si osserva che non si può calcolare l'integrale $\int_0^1 f\left(\frac{x}{2}\right)dx$ con le informazioni fornite, poiché se si compie la sostituzione $t = \frac{x}{2}$, con $dx = 2dt$, l'integrale diventa: $\int_0^1 f\left(\frac{x}{2}\right)dx = 2\int_0^{\frac{1}{2}} f(t)dt$ e quest'ultimo integrale non è noto.

