

**ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO DI ORDINAMENTO • 2009**

■ **PROBLEMA 1**

È assegnato il settore circolare \widehat{AOB} di raggio r e ampiezza x (r e x sono misurati, rispettivamente, in *metri* e *radianti*).

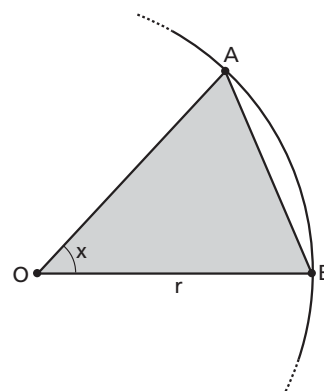
1. Si provi che l'area S compresa fra l'arco e la corda AB è espressa, in funzione di x , da

$$S(x) = \frac{1}{2} r^2 (x - \sin x) \text{ con } x \in [0; 2\pi].$$

2. Si studi come varia $S(x)$ e se ne disegni il grafico (avendo posto $r = 1$).

3. Si fissi l'area del settore \widehat{AOB} pari a 100 m^2 . Si trovi il valore di r per il quale è minimo il perimetro di \widehat{AOB} e si esprima il corrispondente valore di x in gradi sessagesimali (è sufficiente l'approssimazione al grado).

4. Sia $r = 2$ e $x = \frac{\pi}{3}$. Il settore \widehat{AOB} è la base di un solido W le cui sezioni ottenute con piani ortogonali a OB sono tutte quadrati. Si calcoli il volume di W .



► **Figura 1.**

SOLUZIONE DELLA PROVA D'ESAME CORSO DI ORDINAMENTO • 2009

PROBLEMA 1

1. Indichiamo con:

$S(\widehat{AOB})$ l'area del settore circolare \widehat{AOB} di raggio r e ampiezza x ,

$S(AOB)$ l'area del triangolo isoscele AOB ,

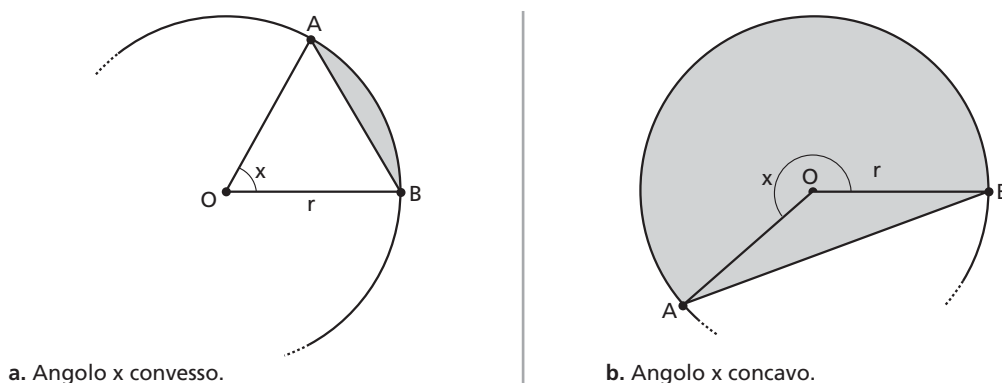
$S(x)$ la superficie compresa fra l'arco e la corda AB .

Differenziamo i casi in cui l'angolo x del settore circolare è convesso o concavo (figura 3):

a) se x è convesso ($0 \leq x < \pi$) risulta $S(x) = S(\widehat{AOB}) - S(AOB)$;

b) se x è concavo ($\pi \leq x \leq 2\pi$) risulta $S(x) = S(\widehat{AOB}) + S(AOB)$.

▼ Figura 3.



L'area del settore circolare di raggio r e ampiezza x è $S(\widehat{AOB}) = \frac{r^2 x}{2}$, mentre l'area del triangolo AOB , conoscendo due lati e l'angolo compreso, è per la trigonometria:

$$S(AOB) = \begin{cases} \frac{r^2 \sin x}{2} & \text{se } 0 \leq x < \pi \\ \frac{r^2 \sin(2\pi - x)}{2} = -\frac{r^2 \sin x}{2} & \text{se } \pi \leq x \leq 2\pi \end{cases}$$

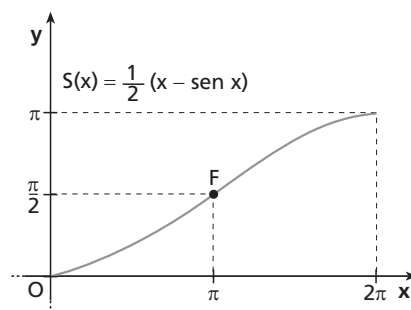
Quindi la superficie $S(x)$ diventa:

$$S(x) = \begin{cases} S(\widehat{AOB}) - S(AOB) & \text{se } 0 \leq x < \pi \\ S(\widehat{AOB}) + S(AOB) & \text{se } \pi \leq x \leq 2\pi \end{cases} \rightarrow S(x) = \begin{cases} \frac{r^2 x}{2} - \frac{r^2 \sin x}{2} & \text{se } 0 \leq x < \pi \\ \frac{r^2 x}{2} - \frac{r^2 \sin x}{2} & \text{se } \pi \leq x \leq 2\pi \end{cases} \rightarrow$$

$$S(x) = \frac{r^2 x - r^2 \sin x}{2} = \frac{1}{2} r^2 (x - \sin x) \text{ con } x \in [0; 2\pi].$$

2. Ponendo $r = 1$, diventa $S(x) = \frac{1}{2} (x - \sin x)$. Tale funzione è continua nell'intervallo di definizione $[0; 2\pi]$; agli estremi del dominio risulta $S(0) = 0$, $S(2\pi) = \pi$; la sua derivata prima ha espressione: $S'(x) = \frac{1}{2} (1 - \cos x)$. Pertanto risulta $S'(x) > 0$ per $0 < x < 2\pi$ e $S'(0) = S'(2\pi) = 0$: la funzione è non decrescente e ha tangente orizzontale negli estremi dell'intervallo.

La derivata seconda vale $S''(x) = \frac{1}{2} \sin x$: è positiva per $0 < x < \pi$, negativa per $\pi < x < 2\pi$, nulla per $x = 0$, $x = \pi$, $x = 2\pi$; la curva ha pertanto un flesso $F\left(\pi; \frac{\pi}{2}\right)$. Nella figura 4 è rappresentato il grafico della funzione $S(x)$.



► Figura 4.

3. Posta l'area del settore circolare $S(\widehat{AOB}) = \frac{r^2 x}{2}$ uguale a 100 m^2 , diventa $\frac{r^2 x}{2} = 100$, quindi $r = \sqrt{\frac{200}{x}}$ con $x \in]0; 2\pi]$; risulta allora che, al variare di x nell'intervallo, la variabile r è inferiormente limitata ovvero $r \geq \frac{10}{\sqrt{\pi}}$.

Calcoliamo il perimetro P del settore \widehat{AOB} in funzione del raggio r , considerando che si può scrivere l'angolo x in funzione del raggio r ovvero $x = \frac{200}{r^2}$:

$$P = r + r + rx \rightarrow P(r) = 2r + r \frac{200}{r^2} = 2r + \frac{200}{r}.$$

Determiniamo la derivata prima di tale funzione e studiamone il segno:

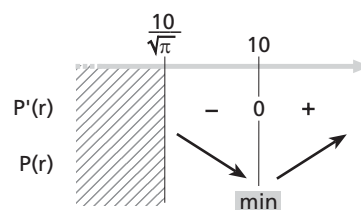
$$P'(r) = 2 - \frac{200}{r^2}; P'(r) > 0 \rightarrow r^2 > 100 \rightarrow r > 10.$$

In figura 5 è riportato il quadro dei segni.

La funzione ha un minimo per $r = 10 \text{ m}$; in tal caso l'angolo corrispondente misura:

$$x = \frac{200}{10^2} = 2 \text{ rad} \approx 57,3^\circ \approx 115^\circ.$$

▼ Figura 5.



4. Posto $r = 2$ e $x = \frac{\pi}{3}$, fissiamo un sistema di riferimento ortogonale Oxy contenente il settore in modo che O coincida con l'origine; risulta allora che B ha coordinate $(2; 0)$ e $A(1; \sqrt{3})$ (figura 6).

La retta OA ha equazione $f(x) = \sqrt{3}x$ mentre l'arco AB è il grafico della funzione $g(x) = \sqrt{4 - x^2}$, per $x \in [1; 2]$.

Poiché il solido W ha come base il settore circolare e ha sezioni ortogonali a OB quadrate, si ottiene il suo volume V secondo la seguente formula:

$$\begin{aligned} V(W) &= \int_0^1 [f(x)]^2 dx + \int_1^2 [g(x)]^2 dx = \\ &= \int_0^1 3x^2 dx + \int_1^2 (4 - x^2) dx = [x^3]_0^1 + \left[4x - \frac{x^3}{3} \right]_1^2 = 1 + \left(8 - \frac{8}{3} - 4 + \frac{1}{3} \right) = \frac{8}{3}. \end{aligned}$$

▼ Figura 6.

