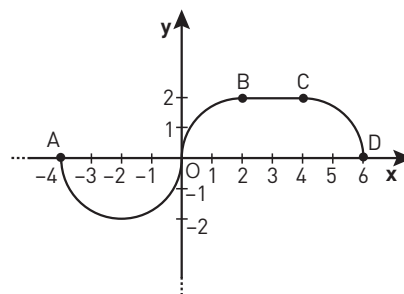


**ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO SPERIMENTALE P.N.I. • 2014**

PROBLEMA 1

Sia $g(x)$ una funzione continua sull'intervallo chiuso $[-4; 6]$. Il grafico di $g(x)$, disegnato a lato, passa per i punti $A(-4; 0)$, $O(0; 0)$, $B(2; 2)$, $C(4; 2)$, $D(6; 0)$ e consiste della semicirconferenza di diametro AO , dell'arco, quarto di circonferenza, di estremi O e B , del segmento BC e dell'arco CD di una parabola avente per asse di simmetria l'asse x .



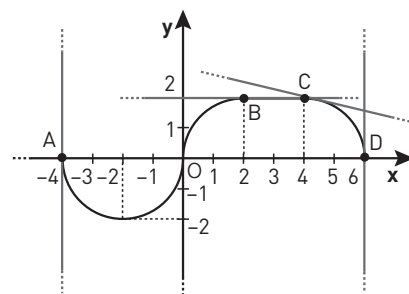
▲ **Figura 1.**

1. Si dica, giustificando la risposta, se $g(x)$ è derivabile nei punti A , O , B , C , D .
2. Posto $f(x) = \int_{-4}^x g(t) dt$, si calcolino: $f(-4)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(4)$, $f(6)$.
3. Per quali valori di $x \in [-4; 6]$, $f(x)$ è positiva, negativa o nulla?
E per quali x è positiva, negativa o nulla la funzione derivata seconda $f''(x)$?
4. La funzione $f(x)$ presenta un massimo e un minimo assoluti? Qual è l'andamento di $f(x)$?

SOLUZIONE DELLA PROVA D'ESAME CORSO SPERIMENTALE P.N.I. • 2014

PROBLEMA 1

1. Sia $g(x)$ la funzione continua nell'intervallo chiuso $[-4; 6]$ il cui grafico è rappresentato nella figura 4. Valutiamo se tale funzione è derivabile nei punti A, O, B, C, D , tenendo conto del significato geometrico della derivata prima di una funzione in un punto, ossia coincidente con il coefficiente angolare della retta tangente al grafico in quel punto.



▲ Figura 4.

- In $A(-4; 0)$: il grafico consiste a destra nella semicirconferenza di diametro AO ; nel punto A la tangente è verticale, pertanto in tale punto la funzione non è derivabile a destra;
- in $O(0; 0)$: il grafico è rappresentato a sinistra dalla semicirconferenza di diametro AO , mentre a destra dal quarto di circonferenza di estremi O e B ; nel punto O la tangente è verticale pertanto in tale punto la funzione non è derivabile;
- in $B(2; 2)$: il grafico consiste, a sinistra, nel quarto di circonferenza, di estremi O e B , mentre a destra, nel segmento orizzontale BC ; nel punto B la tangente è $y=2$, pertanto in tale punto la funzione è derivabile, con valore $g'(2)=0$;
- in $C(4; 2)$ il grafico è rappresentato, a sinistra, dal segmento orizzontale BC , pertanto $g'_-(4)=0$, mentre, a destra, dall'arco CD di una parabola avente per asse di simmetria l'asse x ; troviamo l'equazione di tale arco imponendo alla generica parabola con vertice in D , $x = -ay^2 + 6$, il passaggio per il punto $C(4; 2)$:

$$x = -ay^2 + 6 \rightarrow 4 = -a \cdot 2^2 + 6 \rightarrow a = \frac{1}{2} \rightarrow g(x) = \sqrt{12 - 2x}, \quad 4 \leq x \leq 6.$$

Calcoliamo la derivata prima:

$$g'(x) = \frac{-1}{\sqrt{12 - 2x}} \rightarrow g'_+(4) = -\frac{1}{2},$$

pertanto, essendo $g'_-(4) = 0$ e $g'_+(4) = -\frac{1}{2}$, in tale punto la funzione non è derivabile;

- in $D(6; 0)$: l'arco di parabola ha nel vertice tangente verticale; pertanto in tale punto la funzione non è derivabile a sinistra.
2. Posto $f(x) = \int_{-4}^x g(t) dt$, calcoliamo $f(-4), f(0), f(1), f(2), f(4), f(6)$ sfruttando il teorema fondamentale del calcolo integrale e il calcolo di aree comprese tra una curva e l'asse x .

- $f(-4) = \int_{-4}^{-4} g(t) dt = 0.$

- $f(0)$. Corrisponde all'opposto dell'area di metà cerchio di raggio 2:

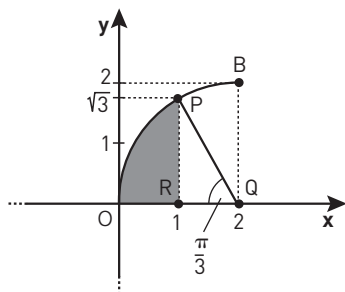
$$f(0) = -\frac{1}{2} \pi \cdot 2^2 = -2\pi.$$

- $f(1)$. Sfruttiamo la proprietà additiva del calcolo integrale:

$$f(1) = \int_{-4}^1 g(t) dt = \int_{-4}^0 g(t) dt + \int_0^1 g(t) dt = f(0) + \int_0^1 g(t) dt = -2\pi + \int_0^1 g(t) dt;$$

l'integrale $\int_0^1 g(t)dt$ corrisponde all'area evidenziata in figura 5; il triangolo PQR risulta metà di un triangolo equilatero di lato 2 e altezza $\sqrt{3}$, mentre il settore circolare OQP ha ampiezza $\frac{\pi}{3}$ e raggio 2; si può ottenere tale area come differenza tra l'area del settore circolare e l'area del triangolo PQR :

$$\begin{aligned} f(1) &= -2\pi + \int_0^1 g(t)dt = -2\pi + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{3} \cdot 2^2 - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sqrt{3} \right) = -2\pi + \frac{2}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2} = \\ &= -\frac{4}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$



▲ **Figura 5.**

- **$f(2)$.** Applichiamo l'additività integrale:

$$f(2) = \int_{-4}^2 g(t)dt = \int_{-4}^0 g(t)dt + \int_0^2 g(t)dt = f(0) + \int_0^2 g(t)dt.$$

Poiché l'integrale $\int_0^2 g(t)dt$ corrisponde a un quarto di cerchio di raggio 2, risulta:

$$f(2) = -2\pi + \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot 2^2 = -\pi.$$

- **$f(4)$.** Sfruttiamo la proprietà additiva del calcolo integrale:

$$f(4) = \int_{-4}^4 g(t)dt = \int_{-4}^2 g(t)dt + \int_2^4 g(t)dt = f(2) + \int_2^4 g(t)dt.$$

L'integrale $\int_2^4 g(t)dt$ rappresenta l'area di un quadrato di lato 2, pertanto vale:

$$f(4) = -\pi + 2^2 = -\pi + 4.$$

- **$f(6)$.** Applichiamo nuovamente l'additività:

$$f(6) = \int_{-4}^6 g(t)dt = \int_{-4}^4 g(t)dt + \int_4^6 g(t)dt = f(4) + \int_4^6 g(t)dt.$$

Calcoliamo l'integrale $\int_4^6 g(t)dt$ come metà del segmento parabolico inscritto in un rettangolo di dimensioni 2 e 4:

$$f(6) = -\pi + 4 + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot (2 \cdot 4) \right) = -\pi + 4 + \frac{8}{3} = -\pi + \frac{20}{3}.$$

3. Per valutare il segno della funzione $f(x) = \int_{-4}^x g(t)dt$ ricordiamo che per il teorema fondamentale del cal-

colo integrale risulta $f'(x) = g(x)$, con $-4 < x < 6$; dal grafico di $g(x)$ di figura 4 e dai risultati al punto 2 ne segue che:

- per $-4 < x < 0$, $g(x) < 0 \rightarrow f'(x) < 0 \rightarrow f(x)$ decrescente con $f(-4) = 0$ e $f(0) = -2\pi$;
- per $x = 0$, $g(0) = 0 \rightarrow f'(0) = 0 \rightarrow f(x)$ ha punto stazionario per $x = 0$;
- per $0 < x \leq 2$, $g(x) > 0 \rightarrow f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ crescente con $f(0) = -2\pi$ e $f(2) = -\pi$;
- per $2 < x \leq 4$, $g(x) = 2 \rightarrow f'(x) = 2 \rightarrow f(x)$ crescente con $f(2) = -\pi$ e $f(4) = -\pi + 4$;
- per $4 < x < 6$, $g(x) > 0 \rightarrow f'(x) > 0 \rightarrow f(x)$ crescente con $f(4) = -\pi + 4$ e $f(6) = -\pi + \frac{20}{3}$.

Dal quadro si deduce che esiste un $\bar{x} \in]2; 4[$, zero della funzione ovvero:

$$\begin{aligned} f(\bar{x}) = 0 &\rightarrow \int_{-4}^2 g(t)dt + \int_2^{\bar{x}} g(t)dt = 0 \rightarrow f(2) + \int_2^{\bar{x}} 2dt = 0 \rightarrow \\ &\rightarrow -\pi + 2(\bar{x} - 2) = 0 \rightarrow \bar{x} = 2 + \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

In sintesi:

- $f'(x) > 0$ per $2 + \frac{\pi}{2} < x \leq 6$;
- $f'(x) < 0$ per $-4 < x < 2 + \frac{\pi}{2}$;
- $f'(x) = 0$ per $x = -4 \vee x = 2 + \frac{\pi}{2}$.

Per valutare il segno della derivata seconda $f''(x)$ sfruttiamo nuovamente il teorema fondamentale del calcolo integrale, ricavando che $f''(x) = g'(x)$, con $-4 < x < 6$. Osservando la crescenza e decrescenza del grafico di $g(x)$ di figura 4 si deduce che:

- $f''(x) > 0$ per $-2 < x < 0 \vee 0 < x < 2$;
- $f''(x) < 0$ per $-4 < x < -2 \vee 4 < x < 6$;
- $f''(x) = 0$ per $2 \leq x < 4 \vee x = -2$.

Si osserva che per il punto 1 la funzione $f''(x) = g'(x)$ non è definita per

$$x = -4 \wedge x = 0 \wedge x = 4 \wedge x = 6.$$

4. Dai precedenti punti sintetizziamo le informazioni sulla funzione $f(x)$:

- è una funzione definita continua nell'intervallo $[-4, 6]$;
- passa per i punti:

$$A'(-4; 0), O'(0; -2\pi), B'(2; -\pi), C'(4; -\pi + 4), D'\left(6; -\pi + \frac{20}{3}\right);$$

- ha segno:

- $f(x) > 0$ per $2 + \frac{\pi}{2} < x \leq 6$;
- $f(x) < 0$ per $-4 < x < 2 + \frac{\pi}{2}$;
- $f(x) = 0$ per $x = -4 \vee x = 2 + \frac{\pi}{2}$;

- ha derivata prima tale che:

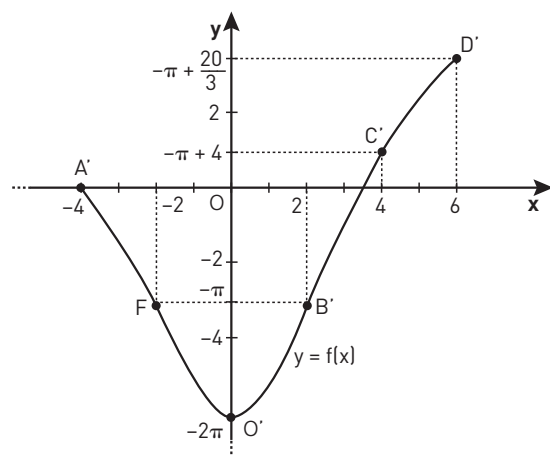
- $f(x)$ decrescente per $-4 < x < 0$,

- $f'(0) = 0$ allora $x = 0$ punto stazionario;
- $f(x)$ crescente per $0 < x < 6$,

pertanto, per il teorema di Weierstrass, la funzione ha minimo assoluto nel punto $O'(0; -2\pi)$, massimo relativo per $x = 6$ e $x = -4$ con $f(6) = -\pi + \frac{20}{3}$, $f(-4) = 0$ e quindi massimo assoluto in $D'\left(6; -\pi + \frac{20}{3}\right)$;

- ha derivata seconda tale che la funzione ha:
 - concavità verso l'alto per $-2 < x < 0 \vee 0 < x < 2$;
 - concavità verso il basso per $-4 < x < -2 \vee 4 < x < 6$;
 - un flesso per $x = -2$, $F(-2; -\pi)$, mentre $f''(x) = 0$ per $2 \leq x < 4$, pertanto il grafico è un segmento $B'C'$, sorretto dalla retta di equazione $y = 2x + \pi - 4$.

In figura 6 è riportato l'andamento della funzione $f(x)$.



◀ **Figura 6.**