

■ **PROBLEMA 2**

Sia $f(x) = a2^x + b2^{-x} + c$ con a, b, c numeri reali. Si determinino a, b, c in modo che:

1. la funzione f sia pari;

2. $f(0) = 2$;

3. $\int_0^1 f(x) dx = \frac{3}{2 \ln 2}$.

Si studi la funzione g ottenuta sostituendo ad a, b, c i valori così determinati e se ne disegni il grafico G .

Si consideri la retta r di equazione $y = 4$ e si determinino, approssimativamente, le ascisse dei punti in cui essa interseca G , mettendo in atto un procedimento iterativo a scelta.

Si calcoli l'area della regione finita del piano racchiusa tra r e G .

Si calcoli $\int \frac{1}{g(x)} dx$.

Si determini la funzione g' il cui grafico è simmetrico di G rispetto alla retta r .

SOLUZIONE DELLA PROVA D'ESAME CORSO SPERIMENTALE P.N.I. • 2003

PROBLEMA 2

1. Se la funzione è pari, allora

$$f(x) = f(-x) \Rightarrow a2^x + b2^{-x} + c = a2^{-x} + b2^x + c \Rightarrow a(2^x - 2^{-x}) = b(2^x - 2^{-x}) \Rightarrow a = b.$$

2. $f(0) = 2 \Rightarrow a + b + c = 2$.

3. $\int_0^1 f(x) dx = \frac{3}{2 \ln 2} \Rightarrow \int_0^1 (a2^x + b2^{-x} + c) dx = \left[a \cdot \frac{2^x}{\ln 2} - b \cdot \frac{2^{-x}}{\ln 2} + cx \right]_0^1 = \frac{2a+b}{2 \ln 2} + c = \frac{3}{2 \ln 2}.$

Le tre condizioni costituiscono il sistema
$$\begin{cases} a = b \\ a + b + c = 2 \\ \frac{2a+b}{2 \ln 2} + c = \frac{3}{2 \ln 2} \end{cases}$$
 con soluzioni $\begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ c = 0 \end{cases}$, quindi la fun-

zione cercata è $g(x) = 2^x + 2^{-x} = 2^x + \frac{1}{2^x} = \frac{2^{2x} + 1}{2^x}.$

Studiamo la funzione $g(x)$.

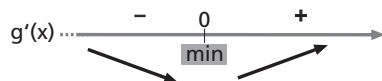
È definita positiva su tutto \mathbb{R} ; la funzione è pari, quindi simmetrica rispetto all'asse delle y .

Il grafico interseca l'asse delle y nel punto $(0; 2)$, non interseca l'asse delle x .

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = +\infty$, il grafico non presenta asintoti orizzontali.

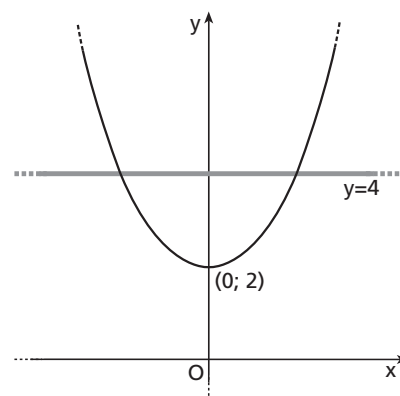
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^x + 2^{-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2^x - 2^{-x}) \cdot \ln 2}{1} = +\infty$, il grafico non presenta asintoti obliqui.

$g'(x) = (2^x - 2^{-x}) \cdot \ln 2 > 0$, se $x > 0$. Il punto $(0; 2)$ è un punto di minimo (figura 5).



◀ Figura 5.

$g''(x) = (2^x + 2^{-x}) \cdot \log^2 2 > 0, \forall x$. Non ci sono flessi, la concavità è sempre rivolta verso l'alto. Il grafico è rappresentato in figura 6.



▲ Figura 6.

x_1	x_2	$h(x_1)$	$h(x_2)$	α
1	2	-3	1	1,5
1,5	2	-2,31...	1	1,75
1,75	2	-1,14...	1	1,875
1,875	2	-0,22...	1	1,9375
1,875	1,9375	-0,22...	0,35...	...

Determiniamo le intersezioni tra la retta $y=4$ e $y=g(x)$:

$$\begin{cases} y = 2^x + 2^{-x} \\ y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2^x + 2^{-x} - 4 = 0 \\ y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2^{2x} - 4 \cdot 2^x + 1 = 0 \\ y = 4 \end{cases}$$

Applichiamo il metodo di bisezione alla funzione $h(x) = 2^{2x} - 4 \cdot 2^x + 1$:

Si arriva infine al valore $\alpha = 1,89997$.

$2^{2x} - 4 \cdot 2^x + 1 = 0 \Rightarrow 2^x = 2 \pm \sqrt{3} \Rightarrow x = \log_2(2 \pm \sqrt{3})$, valori simmetrici rispetto all'asse delle ordinate.

Il valore dell'area richiesta è data dall'integrale:

$$2 \int_0^{\log_2(2+\sqrt{3})} (4 - 2^x - 2^{-x}) dx = 2 \left[4x - \frac{2^x}{\ln 2} + \frac{2^{-x}}{\ln 2} \right]_0^{\log_2(2+\sqrt{3})} = 8 \log_2(2 + \sqrt{3}) - \left(\frac{4\sqrt{3}}{\ln 2} \right) \cong 5,2044$$

$$\int \frac{1}{g(x)} dx = \int \frac{2^x}{1 + 2^{2x}} dx, \text{ posto } t = 2^x \text{ e } dt = (2^x \ln 2) dx, \text{ segue:}$$

$$\frac{1}{\ln 2} \int \frac{t}{1 + t^2} dt = \frac{1}{\ln 2} \cdot \arctg(2^x) + c.$$

Le equazioni della simmetria assiale, con asse la retta $y=4$ sono:

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = 8 - y \end{cases}, \text{ dunque } y' = g'(x) = 8 - 2^x - 2^{-x}.$$