2 Sia $f(x)$ una funzione reale di variabile reale, continua nel campo reale, tale che $f(0) = 2$.
Calcolare:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\int_0^x f(x)\, dt}{2xe^x},$$

dove e è la base dei logaritmi naturali.

2 Partendo dal numeratore della frazione di cui è richiesto il calcolo del limite, poiché la funzione è continua in $\mathbb{R}$, si può applicare il teorema della media integrale alla funzione f nell'intervallo $[0; x]$:

$$\int_0^x f(t)\,dt = f(z)\cdot(x-0) = x\cdot f(z), \text{ con } z \in [0; x].$$

Pertanto $\lim_{x\to 0} \dfrac{\int_0^x f(t)\,dt}{2xe^x} = \dfrac{x\cdot f(z)}{2xe^x} = \lim_{x\to 0}\dfrac{f(z)}{2e}$.

Ora, essendo $z \in [0; x]$, se x tende a 0 anche z tenderà a 0 e $\lim_{x\to 0} f(z) = \lim_{x\to 0} f(z) = 2$ per l'ipotesi di continuità.

Risulta quindi $\lim_{x\to 0} \dfrac{\int_0^x f(t)\,dt}{2xe^x} = \lim_{x\to 0}\dfrac{f(z)}{2e^x} = \dfrac{2}{2e^0} = 1.$