7 Calcolare la derivata, rispetto a x, della funzione: $\int_{-x}^{2x} \frac{dt}{\operatorname{sen} t}$.

7 Si considera inizialmente $x > 0$ per cui si può scrivere $-x < 0 \wedge 2x > 0$. La funzione integranda $f(x) = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$ non è continua nei punti $x = k\pi$, con k intero. Si prenda un punto x_0, con $-x < x_0 < 2x$, e si applichino le proprietà dell'additività dell'integrale e dello scambio degli estremi d'integrazione:

$$\int_{-x}^{2x} \frac{1}{\operatorname{sen} t}\, dt = \int_{-x}^{x_0} \frac{1}{\operatorname{sen} t}\, dt + \int_{x_0}^{2x} \frac{1}{\operatorname{sen} t}\, dt = -\int_{x_0}^{-x} \frac{1}{\operatorname{sen} t}\, dt + \int_{x_0}^{2x} \frac{1}{\operatorname{sen} t}\, dt.$$

Considerata la funzione integrale $F(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{1}{\operatorname{sen} t}\, dt$, con $f(x) = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$ continua nell'intervallo di integrazione $[x_0 ; x]$, risulta:

$$\int_{-x}^{2x} \frac{1}{\operatorname{sen} t}\, dt = F(2x) - F(-x).$$

Derivando membro a membro rispetto alla x e applicando il teorema fondamentale del calcolo integrale si trova:

$$D\left[\int_{-x}^{2x} \frac{1}{\operatorname{sen} t}\, dt\right] = D[F(2x) - F(-x)] = 2\frac{1}{\operatorname{sen} 2x} - \frac{1}{\operatorname{sen} x} = \frac{1 - \cos x}{\operatorname{sen} x \cos x}.$$

Allo stesso modo si dimostra che per $x < 0$, la funzione derivata ha la stessa espressione:

$$D\left[\int_{-x}^{2x} \frac{1}{\operatorname{sen} t}\, dt\right] = \frac{1 - \cos x}{\operatorname{sen} x \cos x}.$$

