10 La funzione reale di variabile reale $f(x)$, continua per ogni x, è tale che:

$$\int_0^2 f(x)\,dx = a, \quad \int_0^6 f(x)\,dx = b,$$

dove a, b sono numeri reali.
Determinare, se esistono, i valori a, b per cui risulta:

$$\int_0^3 f(2x)\,dx = \ln 2 \quad \text{e} \quad \int_1^3 f(2x)\,dx = \ln 4.$$

10 Considerati gli integrali $\int_0^3 f(2x)\,dx = \ln 2$ e $\int_1^3 f(2x)\,dx = \ln 4$, si compia il cambiamento di variabile $2x = t$:

Se $x = \dfrac{t}{2}$, $dx = \dfrac{1}{2}\,dt$ quindi

$$\int_0^3 f(2x)\,dx = \ln 2 \rightarrow \frac{1}{2}\int_0^6 f(t)\,dt = \ln 2 \rightarrow \int_0^6 f(t)\,dt = \ln 4;$$

$$\int_1^3 f(2x)\,dx = \ln 4 \rightarrow \frac{1}{2}\int_2^6 f(t)\,dt = \ln 4 \rightarrow \int_2^6 f(t)\,dt = \ln 16;$$

Sottraendo membro a membro le due uguaglianze, si ottiene: $\int_0^2 f(t)\,dt = -\ln 4$.

Ora, poiché $\int_0^2 f(x)\,dx = a$ e $\int_0^6 f(x)\,dx = b$, si conclude per confronto che $a = -\ln 4$ e $b = \ln 4$.