9 Si calcoli l'integrale indefinito $\int \sqrt{1-x^2}\,dx$ e, successivamente, si verifichi che il risultato di $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$ è in accordo con il suo significato geometrico.

9 Effettuiamo il cambio di variabile $x = \operatorname{sen} t$; quindi $dx = \cos t dt$ e l'integrale può essere riscritto come

$$\int \sqrt{1 - x^2}\, dx = \int \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 t} \cos t\, dt = \int \cos^2 t\, dt.$$

Applicando la formula di bisezione $\cos^2 t = \frac{1 + \cos 2t}{2}$, oppure integrando per parti, otteniamo

$$\int \sqrt{1 - x^2}\, dx = \frac{t + \operatorname{sen} t \cos t}{2} + c,$$

dove c è la costante di integrazione. Sostituendo t con la rispettiva espressione in x, otteniamo

$$\int \sqrt{1 - x^2}\, dx = \frac{\operatorname{arcsen} x + x\sqrt{1 - x^2}}{2} + c.$$

Calcoliamo ora l'integrale definito $\int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\, dx$. Otteniamo

$$\int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\, dx = \left[\frac{\operatorname{arcsen} x + x\sqrt{1 - x^2}}{2} \right]_0^1 = \frac{\operatorname{arcsen} 1 + 1\sqrt{1 - 1}}{2} - \frac{\operatorname{arcsen} 0}{2} = \frac{\pi}{4}.$$

Siccome $y = \sqrt{1 - x^2}$ e l'equazione della semicirconferenza situata nel semipiano delle ordinate positive, relativa alla circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = 1$, osserviamo che calcolare $\int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\, dx$ equivale a calcolare l'area di un quarto di cerchio di raggio 1.