7 Calcolare la derivata, rispetto ad x, della funzione $f(x)$ tale che:

$$f(x) = \int_{x}^{x+1} \ln t\,dt, \text{ con } x > 0.$$

7 Si consideri un valore $x_0 > 0$ tale che $x < x_0 < x + 1$. Per la proprietà dell'integrale rispetto all'intervallo di integrazione si può scrivere:

$$f(x) = \int_x^{x+1} \ln t\, dt = \int_x^{x_0} \ln t\, dt + \int_{x_0}^{x+1} \ln t\, dt = -\int_{x_0}^{x} \ln t\, dt + \int_{x_0}^{x+1} \ln t\, dt.$$

Per definizione della funzione integrale $F(x) = \int_{x_0}^{x} \ln t\, dt$, risulta:

$$f(x) = F(x+1) - F(x).$$

Derivando membro a membro e alla luce del teorema fondamentale del calcolo integrale si trova:

$$f'(x) = F'(x+1) - F'(x) = \ln(x+1) - \ln x = \ln \frac{x+1}{x}.$$