PROBLEMA 2

Per il progetto di una piscina, un architetto si ispira alle funzioni f e g definite, per tutti gli x reali, da:

$$f(x) = x^3 - 16x \quad \text{e} \quad g(x) = \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}x.$$

1. Si studino le funzioni f e g e se ne disegnino i rispettivi grafici in un conveniente sistema di riferimento cartesiano Oxy. Si considerino i punti del grafico di g a tangente orizzontale la cui ascissa è compresa nell'intervallo $[-10; 10]$ e se ne indichino le coordinate.
2. L'architetto rappresenta la superficie libera dell'acqua nella piscina con la regione R delimitata dai grafici di f e di g sull'intervallo $[0; 4]$. Si calcoli l'area di R.
3. Ai bordi della piscina, nei punti di intersezione del contorno di R con le rette $y = -15$ e $y = -5$, l'architetto progetta di collocare dei fari per illuminare la superficie dell'acqua.
   Si calcolino le ascisse di tali punti (è sufficiente un'approssimazione a meno di 10^{-1}).
4. In ogni punto di R a distanza x dall'asse y, la misura della profondità dell'acqua nella piscina è data da $h(x) = 5 - x$. Quale sarà il volume d'acqua nella piscina? Quanti litri d'acqua saranno necessari per riempire la piscina se tutte le misure sono espresse in metri?

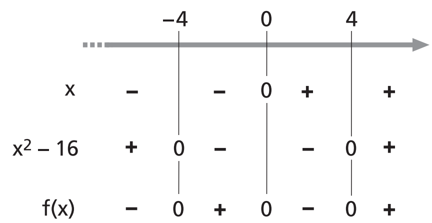
PROBLEMA 2

1. Studiamo la funzione $f(x)=x^3-16x$: ha dominio nel campo reale; $f(-x)=-x^3+16x=-f(x)$, pertanto il corrispondente grafico è simmetrico rispetto all'origine del sistema cartesiano; le intersezioni con gli assi sono $(0; 0)$, $(4; 0)$, $(-4; 0)$. Valutiamo il segno della funzione ponendo $x(x^2-16)>0$:

$$x>0,$$
$$x^2-16>0 \quad \rightarrow \quad x<-4 \vee x>4.$$

Dal quadro del segno (figura 4) si deduce:

$$f(x)>0 \quad \text{per } -4<x<0 \vee x>4,$$
$$f(x)<0 \quad \text{per } x<-4 \vee 0<x<4.$$



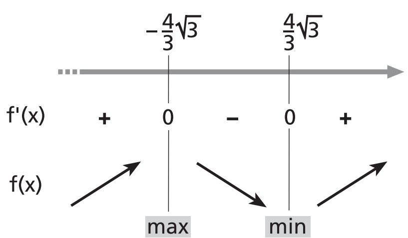
▶ **Figura 4.**

Valutiamo il comportamento della funzione agli estremi del dominio: non esistono asintoti verticali poiché la funzione non ha punti di discontinuità; inoltre risulta:

$$\lim_{x\to\pm\infty}(x^3-16x)=\pm\infty, \quad \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3-16x}{x}=+\infty,$$

pertanto la funzione non ha asintoti orizzontali, né obliqui.
Studiamo la derivata prima e il suo segno:

$$f'(x)=3x^2-16,$$
$$f'(x)>0 \quad \rightarrow \quad 3x^2-16>0 \quad \rightarrow \quad x<-\frac{4\sqrt{3}}{3} \vee x>\frac{4\sqrt{3}}{3},$$
$$f'(x)=0 \quad \rightarrow \quad 3x^2-16=0 \quad \rightarrow \quad x=-\frac{4\sqrt{3}}{3} \vee x=\frac{4\sqrt{3}}{3},$$
$$f'(x)<0 \quad \rightarrow \quad 3x^2-16<0 \quad \rightarrow \quad -\frac{4\sqrt{3}}{3}<x<\frac{4\sqrt{3}}{3}.$$



◀ **Figura 5.**

Dal quadro del segno della derivata prima (figura 5) si ricava che la funzione ha un massimo per $x=-\frac{4\sqrt{3}}{3}$ e un minimo per $x=\frac{4\sqrt{3}}{3}$. Le corrispondenti ordinate valgono:

$$f\left(-\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)=-\frac{64\sqrt{3}}{9}+\frac{192\sqrt{3}}{3}=\frac{128\sqrt{3}}{9}, \quad f\left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)=-\frac{128\sqrt{3}}{9},$$

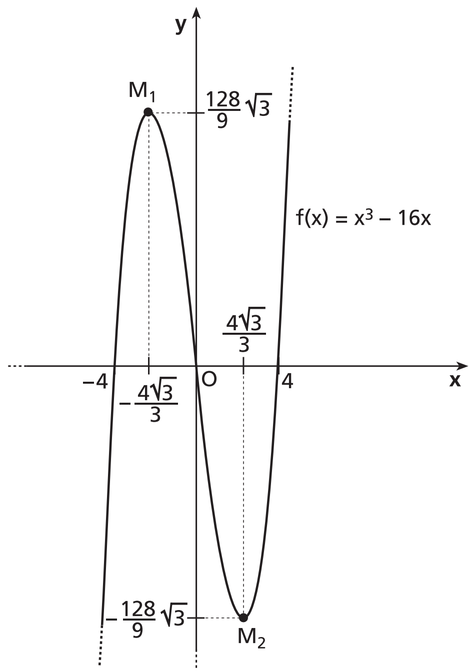
gli estremi relativi della funzione sono quindi:

$$M_1\left(-\frac{4\sqrt{3}}{3};\frac{128\sqrt{3}}{9}\right), \; M_2\left(\frac{4\sqrt{3}}{3},-\frac{128\sqrt{3}}{9}\right).$$

Calcoliamo infine la derivata seconda:

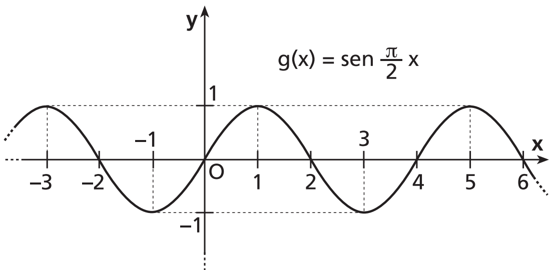
$$f''(x) = 6x.$$

Essa si annulla per $x=0$, è positiva per $x>0$, negativa per $x<0$: la funzione ha un flesso per $x=0$, ha concavità verso l'alto per $x>0$, verso il basso per $x<0$.
Nella figura 6 è riportato il grafico di $f(x) = x^3 - 16x$.



▲ **Figura 6.**

Consideriamo la funzione $g(x) = \text{sen}\dfrac{\pi}{2}x$: il suo grafico si ottiene dalla funzione $y = \text{sen}\,x$ tramite una contrazione orizzontale $x' = \dfrac{x}{\frac{\pi}{2}}$; poiché il periodo della funzione $y = \text{sen}\,x$ è 2π, il periodo di $g(x) = \text{sen}\dfrac{\pi}{2}x$ è $T=4$. Rappresentiamo in figura 7 il suo grafico.

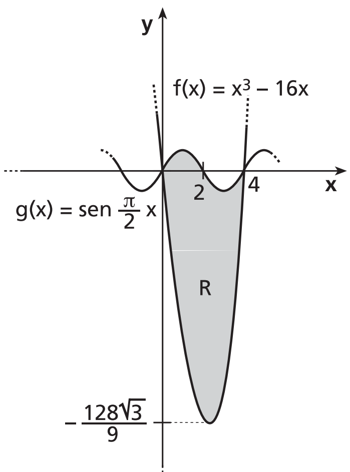


◀ **Figura 7.**

Ricaviamo ora i punti del grafico di g a tangente orizzontale nell'intervallo $[-10; 10]$, deducendoli dal grafico di figura 7 e tenendo conto della periodicità $T=4$ della funzione:

$$\begin{cases} x_k = 2k+1 \\ y_k = (-1)^k \end{cases} \quad \text{con } -5 \leq k \leq 4,\ k \in \mathbb{Z}.$$

2. Rappresentiamo nello stesso sistema cartesiano i grafici delle funzioni f e g e indichiamo con R la regione delimitata nell'intervallo $[0; 4]$ (figura 8).



◀ **Figura 8.**

Calcoliamo la superficie S della regione R mediante l'integrale:

$$S=\int_0^4[g(x)-f(x)]dx=$$

$$=\int_0^4\left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}x-x^3+16x\right)dx=\left[-\frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi}{2}x-\frac{x^4}{4}+8x^2\right]_0^4=-\frac{2}{\pi}-64+128+\frac{2}{\pi}=64.$$

3. Tracciamo le rette $y=-15$ e $y=-5$ che intersecano il contorno della regione R nei punti P, Q, S, T (figura 9).

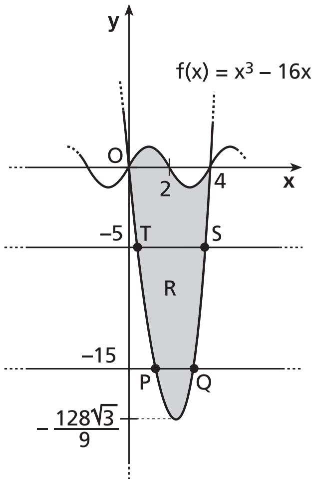


Figura 9.

Determiniamo le ascisse dei punti P e Q, risolvendo il seguente sistema per $0<x<4$:

$$\begin{cases}y=x^3-16x\\y=-15\end{cases}\rightarrow\begin{cases}x^3-16x+15=0\\y=-15\end{cases}\rightarrow\begin{cases}(x-1)(x^2+x-15)=0\\y=-15\end{cases}\rightarrow$$

$$\rightarrow\begin{cases}(x-1)\left(x-\dfrac{-1-\sqrt{61}}{2}\right)\left(x-\dfrac{-1+\sqrt{61}}{2}\right)=0\\y=-15\end{cases}\rightarrow$$

$$\rightarrow\begin{cases}x=1\\y=-15\end{cases}\vee\begin{cases}x-\dfrac{-1-\sqrt{61}}{2}\ \text{non accettabile}\\y=-15\end{cases}\vee\begin{cases}x=\dfrac{-1+\sqrt{61}}{2}\\y=-15\end{cases}$$

Pertanto risulta:

$$x_P=1,\qquad x_Q=\frac{-1+\sqrt{61}}{2}.$$

Le ascisse dei punti S e T, con $0<x<4$ soddisfano il sistema:

$$\begin{cases}y=x^3-16x\\y=-5\end{cases}\rightarrow\begin{cases}x^3-16x+5=0\\y=-5\end{cases}$$

L'equazione $x^3-16x+15=0$ non ha soluzioni razionali, pertanto procediamo con l'analisi numerica secondo un'approssimazione a meno di 10^{-1}, deducendo dal grafico che esistono due radici x_T e x_S. Posto $p(x)=x^3-16x+5$, osserviamo che $p(0)=5$ e $p(1)=-10$, segue che $0<x_T<1$; applichiamo il metodo di bisezione, partendo dai valori $a_0=0$ e $b_0=1$.

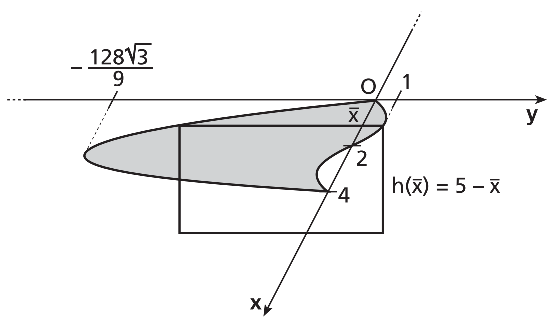
a	$p(a)$	b	$p(b)$	$\frac{a+b}{2}$	$p\left(\frac{a+b}{2}\right)$
0	5	1	− 10	0,5	− 2,875
0	5	0,5	− 2,875	0,25	1,016
0,25	1,016	0,5	− 2,875	0,375	0,947
0,25	1,016	0,375	− 0,947	0,3125	0,031

Si trova quindi che $x_T = 0{,}3$ a meno di 10^{-1}.
Ricerchiamo ora il valore approssimato di x_S, osservando che $p(3) = -16$ e $p(4) = 5$, segue che $3 < x_S < 4$; riapplichiamo il metodo di bisezione, partendo dai valori $a_0 = 3$ e $b_0 = 4$.

a	$p(a)$	b	$p(b)$	$\frac{a+b}{2}$	$p\left(\frac{a+b}{2}\right)$
3	− 16	4	5	3,5	− 8,125
3,5	− 8,125	4	5	3,75	− 2,266
3,75	− 2,266	4	5	3,875	1,186
3,75	− 2,266	3,875	1,186	3,813	− 0,571

Dalla tabella ricaviamo così che un valore approssimato della radice è $x_S = 3{,}8$ con un errore minore di 0,1.

4. Calcoliamo il volume della piscina sezionando il solido con piani $x = \overline{x}$, $0 \leq \overline{x} \leq 4$ perpendicolari alla superficie dell'acqua (figura 10).



◀ **Figura 10.**

Per ogni piano si ottiene un rettangolo di altezza $h(\overline{x}) = 5 - x$ e base $g(\overline{x}) - f(\overline{x})$; l'area di tale rettangolo vale:

$$(g(\overline{x}) - f(\overline{x})) \cdot h(\overline{x}) = \left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\overline{x} - x^3 + 16\overline{x}\right) \cdot (5 - \overline{x}).$$

Il volume V della vasca può essere così calcolato mediante l'integrale:

$$V = \int_0^4 \left[\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\overline{x} - \overline{x}^3 + 16\overline{x}\right](5 - \overline{x})d\overline{x} = 5\int_0^4 \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\overline{x}d\overline{x} - \int_0^4 \overline{x}\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\overline{x}d\overline{x} + \int_0^4 [-\overline{x}^3 + 16\overline{x}](5 - \overline{x})d\overline{x} =$$

$$= 5\left[-\frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi}{2}\overline{x}\right]_0^4 - \int_0^4 \overline{x}\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\overline{x}d\overline{x} + \int_0^4 (\overline{x}^4 - 5\overline{x}^3 - 16\overline{x}^2 + 80\overline{x})d\overline{x} =$$

$$= 5(-1 + 1) - \int_0^4 \overline{x}\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\overline{x}d\overline{x} + \left[\frac{\overline{x}^5}{5} - \frac{5\overline{x}^4}{4} - \frac{16\overline{x}^3}{3} + 40\overline{x}^2\right]_0^4 =$$

svolgiamo per parti l'integrale contenuto ancora nell'espressione:

$$= -\left[-\frac{2\bar{x}}{\pi}\cos\frac{\pi}{2}\bar{x}\right]_0^4 - \int_0^4 \frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi}{2}\bar{x}\,d\bar{x} + \left[\frac{4^5}{5} - \frac{5\cdot 4^4}{4} - \frac{16\cdot 4^3}{3} + 40\cdot 4^2\right] =$$

$$= \frac{8}{\pi} - \left[\frac{4}{\pi^2}\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\bar{x}\right]_0^4 + \left(\frac{1024}{5} - 320 - \frac{1024}{3} + 640\right) = \frac{8}{\pi} + \frac{2752}{15}.$$

In unità di misura, tenendo conto che 1 dm^3 equivale a 1 L:

$$V = \left(\frac{8}{\pi} + \frac{2752}{15}\right)m^3 = \left(\frac{8}{\pi} + \frac{2752}{15}\right)\cdot 10^3\ \mathrm{L} \simeq 16013{,}15\ \mathrm{L}.$$