ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO DI ORDINAMENTO • 2011

PROBLEMA 1

Si considerino le funzioni f e g definite, per tutti gli x reali, da:

$$f(x) = x^3 - 4x \quad \text{e} \quad g(x) = \operatorname{sen} \pi x.$$

1. Fissato un conveniente sistema di riferimento cartesiano Oxy, si studino f e g e se ne disegnino i rispettivi grafici G_f e G_g.
2. Si calcolino le ascisse dei punti di intersezione di G_f con la retta $y = -3$. Successivamente, si considerino i punti di G_g a tangente orizzontale la cui ascissa è compresa nell'intervallo $[-6; 6]$ e se ne indichino le coordinate.
3. Sia R la regione del piano delimitata da G_f e G_g sull'intervallo $[0; 2]$. Si calcoli l'area di R.
4. La regione R rappresenta la superficie libera dell'acqua contenuta in una vasca. In ogni punto di R a distanza x dall'asse y la misura della profondità dell'acqua nella vasca è data da $h(x) = 3 - x$. Quale integrale definito dà il volume dell'acqua? Supposte le misure in metri, quanti litri di acqua contiene la vasca?

SOLUZIONE DELLA PROVA D'ESAME
CORSO DI ORDINAMENTO • 2011

PROBLEMA 1

1. Studiamo la funzione $f(x) = x^3 - 4x$. Essa è polinomiale e ha dominio $\mathbb{R}$; $f(-x) = -x^3 + 4x = -f(x)$, pertanto la funzione è dispari cioè simmetrica rispetto all'origine; tenendo conto che $f(x) = x(x^2 - 4)$ essa interseca gli assi cartesiani nei punti $(0; 0)$, $(2; 0)$, $(-2; 0)$. Valutiamo il segno della funzione ponendo $x(x^2 - 4) > 0$:

$$x > 0,$$
$$x^2 - 4 > 0 \quad \rightarrow \quad x < -2 \vee x > 2.$$

Dal quadro dei segni (figura 2) si deduce:

$$f(x) > 0 \quad \text{per } -2 < x < 0 \vee x > 2,$$
$$f(x) < 0 \quad \text{per } x < -2 \vee 0 < x < 2.$$

▲ **Figura 2.**

Valutiamo il comportamento della funzione agli estremi del dominio: non esistono asintoti verticali poiché la funzione non ha punti di discontinuità; inoltre risulta:

$$\lim_{x \to \pm\infty} (x^3 - 4x) = \pm\infty, \quad \lim_{x \to \pm\infty} \frac{(x^3 - 4x)}{x} = +\infty,$$

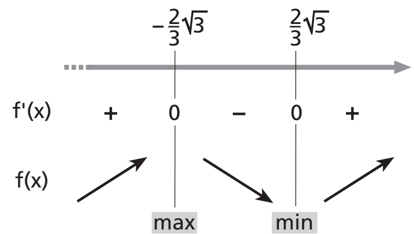
pertanto la funzione non ha asintoti orizzontali, né obliqui.
Studiamo la derivata prima e il suo segno:

$$f'(x) = 3x^2 - 4,$$

$$f'(x) > 0 \quad \rightarrow \quad 3x^2 - 4 > 0 \quad \rightarrow \quad x < -\frac{2\sqrt{3}}{3} \vee x > \frac{2\sqrt{3}}{3},$$

$$f'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad 3x^2 - 4 = 0 \quad \rightarrow \quad x = -\frac{2\sqrt{3}}{3} \vee x = \frac{2\sqrt{3}}{3},$$

$$f'(x) < 0 \quad \rightarrow \quad 3x^2 - 4 < 0 \quad \rightarrow \quad -\frac{2\sqrt{3}}{3} < x < \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$



▲ **Figura 3.**

Dal quadro del segno della derivata prima (figura 3) si trova che la funzione ha un massimo per $x = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$ e un minimo per $x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$. Le corrispondenti ordinate valgono:

$$f\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{8\sqrt{3}}{9} + \frac{8\sqrt{3}}{3} = \frac{16\sqrt{3}}{9}, \qquad f\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{16\sqrt{3}}{9},$$

gli estremi relativi della funzione sono quindi:

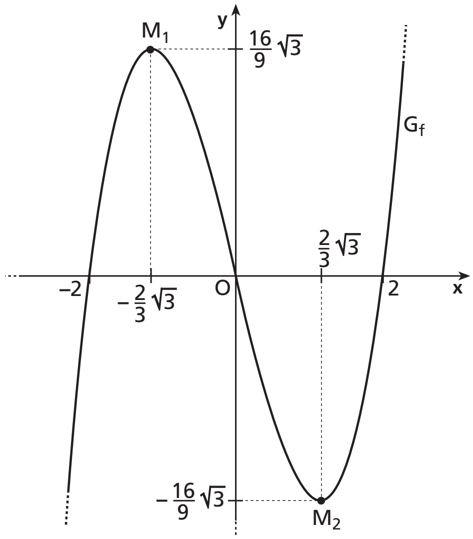
$$M_1\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}; \frac{16\sqrt{3}}{9}\right), M_2\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}; -\frac{16\sqrt{3}}{9}\right).$$

Calcoliamo infine la derivata seconda:

$$f''(x) = 6x.$$

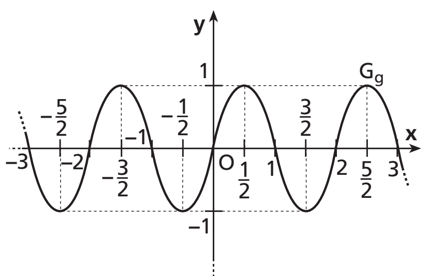
Essa si annulla per $x = 0$, è positiva per $x > 0$, negativa per $x < 0$: la funzione ha un flesso per $x = 0$, ha concavità verso l'alto per $x > 0$, verso il basso per $x < 0$.

Nella figura 4 è riportato il grafico G_f.



◀ **Figura 4.**

Consideriamo la funzione $g(x) = \operatorname{sen} \pi x$: il suo grafico G_g può essere ottenuto dalla funzione $y = \operatorname{sen} x$ tramite una contrazione orizzontale $x' = \dfrac{x}{\pi}$; poiché il periodo della funzione $y = \operatorname{sen} x$ è 2π, il periodo di $g(x) = \operatorname{sen} \pi x$ è $T = 2$. Rappresentiamo in figura 5 il suo grafico G_g.



◀ **Figura 5.**

2. Determiniamo le ascisse dei punti di intersezione di G_f con la retta $y = -3$, risolvendo il sistema:

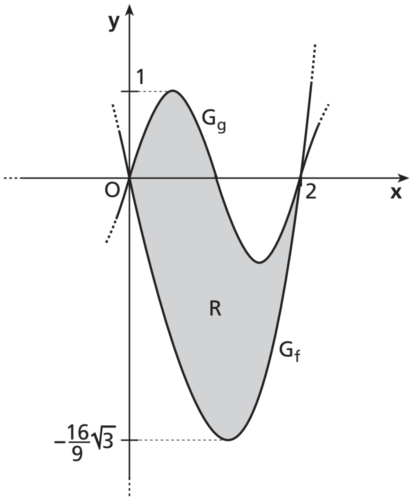
$$\begin{cases} y = x^3 - 4x \\ y = -3 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x^3 - 4x + 3 = 0 \\ y = -3 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} (x-1)(x^2 + x - 3) = 0 \\ y = -3 \end{cases} \quad \rightarrow$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = -3 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{13}}{2} \\ y = -3 \end{cases}$$

Ricaviamo ora i punti di G_g a tangente orizzontale nell'intervallo $[-6; 6]$, deducendoli dal grafico di figura 5 e tenendo conto della periodicità 2 della funzione:

$$\begin{cases} x_k = \dfrac{1}{2} + k \\ y_k = (-1)^k \end{cases} \quad \text{con } -6 \leq k \leq 5,\ k \in \mathbb{Z}.$$

3. Rappresentiamo nello stesso sistema cartesiano i grafici G_f e G_g nell'intervallo [0; 2] (figura 6).

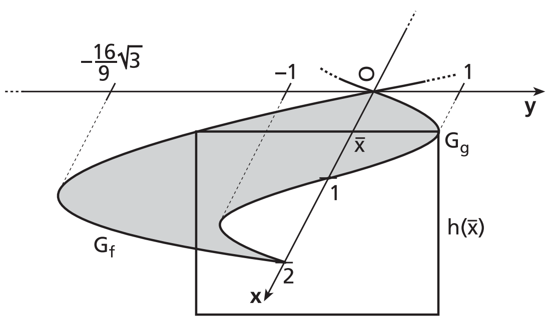


◀ **Figura 6.**

Calcoliamo la superficie S della regione R mediante l'integrale:

$$S=\int_0^2[g(x)-f(x)]dx=\int_0^2(\text{sen}\,\pi x-x^3+4x)dx=\left[-\frac{1}{\pi}\cos\pi x-\frac{x^4}{4}+2x^2\right]_0^2=-\frac{1}{\pi}-4+8+\frac{1}{\pi}=4.$$

4. Calcoliamo il volume della vasca sezionando il solido con piani $x=\overline{x}$, $0\leq\overline{x}\leq 2$ perpendicolari alla superficie dell'acqua (figura 7).



◀ **Figura 7.**

Per ogni piano si ottiene un rettangolo di altezza $h(\overline{x})=3-\overline{x}$ e base $|g(\overline{x})-f(\overline{x})|$; la superficie di tale rettangolo vale:

$$S(\overline{x})=|g(\overline{x})-f(\overline{x})|\cdot h(\overline{x})=|\text{sen}\,\pi\overline{x}-\overline{x}^3+4\overline{x}|\cdot(3-\overline{x}).$$

Poiché nell'intervallo considerato $g(x)\geq f(x)$, possiamo tralasciare il valore assoluto.
Il volume V della vasca può essere così calcolato mediante l'integrale:

$$V=\int_0^2[\text{sen}\,\pi\overline{x}-\overline{x}^3+4\overline{x}](3-\overline{x})d\overline{x}=3\int_0^2\text{sen}\,\pi\overline{x}d\overline{x}-\int_0^2 x\text{sen}\,\pi\overline{x}d\overline{x}+\int_0^2[-\overline{x}^3+4\overline{x}](3-\overline{x})d\overline{x}=$$

$$=3\left[-\frac{1}{\pi}\cos\pi\overline{x}\right]_0^2-\int_0^2\overline{x}\text{sen}\,\pi\overline{x}d\overline{x}+\int_0^2(\overline{x}^4-3\overline{x}^3-4\overline{x}^2+12\overline{x})d\overline{x}=$$

$$=3(-1+1)-\int_0^2\overline{x}\text{sen}\,\pi\overline{x}d\overline{x}+\left[\frac{\overline{x}^5}{5}-\frac{3\overline{x}^4}{4}-\frac{4\overline{x}^3}{3}+6\overline{x}^2\right]_0^2=$$

svolgiamo per parti l'integrale contenuto ancora nell'espressione:

$$= -\left[-\frac{\bar{x}}{\pi}\cos\pi\bar{x}\right]_0^2 - \int_0^2 \frac{1}{\pi}\cos\pi\bar{x}d\bar{x} + \left[\frac{2^5}{5} - \frac{3\cdot 2^4}{4} - \frac{4\cdot 2^3}{3} + 6\cdot 2^2\right] =$$

$$= \frac{2}{\pi} - \left[\frac{1}{\pi^2}\operatorname{sen}\pi\bar{x}\right]_0^2 + \left(\frac{32}{5} - 12 - \frac{32}{3} + 24\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi} + \frac{116}{5}.$$

In unità di misura, tenendo conto che 1 dm^3 equivale a 1 L:

$$V = \left(\frac{2}{\pi} + \frac{116}{15}\right)m^3 = \left(\frac{2}{\pi} + \frac{116}{15}\right)\cdot 10^3 \text{ L} \simeq 8369{,}95 \text{ L}.$$