

■ **PROBLEMA 1**

Nel piano  $Oxy$  sono date le curve  $\lambda$  e  $r$  di equazioni:

$$\lambda: x^2 = 4(x - y) \text{ e } r: 4y = x + 6.$$

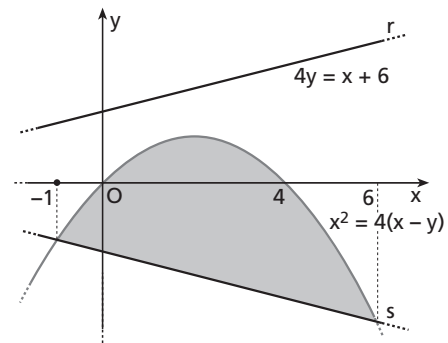
1. Si provi che  $\lambda$  e  $r$  non hanno punti comuni.
2. Si trovi il punto  $P \in \lambda$  che ha distanza minima da  $r$ .
3. Si determini l'area della regione finita di piano racchiusa da  $\lambda$  e dalla retta  $s$ , simmetrica di  $r$  rispetto all'asse  $x$ .
4. Si determini il valore di  $c$  per il quale la retta  $y = c$  divide a metà l'area della regione  $S$  del I quadrante compresa tra  $\lambda$  e l'asse  $x$ .
5. Si determini il volume del solido di base  $S$  le cui sezioni ottenute con piani ortogonali all'asse  $x$  sono quadrati.

**PROBLEMA 1**

1. Mettiamo a sistema le equazioni delle due curve:

$$\begin{cases} x^2 = 4(x-y) \\ 4y = x+6 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{4}x + \frac{3}{2} \\ x^2 = 4x - x - 6 \end{cases}$$

In forma normale la seconda equazione è  $x^2 - 3x + 6 = 0$ , e ha discriminante  $3^2 - 4 \cdot 6 < 0$ , quindi non ci sono soluzioni in campo reale.



▲ **Figura 1.**

2. La distanza di un punto  $(x_0; y_0)$  da una retta  $ax + by + c = 0$  è  $\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ . Per imporre che  $(x_0; y_0)$  appartenga alla parabola basta sostituire  $x_0$  e  $y_0$  nell'equazione della parabola. Si ha:  $y_0 = x_0 - \frac{1}{4}x_0^2$ . Sostituendo nella formula della distanza si trova:

$$\frac{\left| x_0 - 4\left(x_0 - \frac{1}{4}x_0^2\right) + 6 \right|}{\sqrt{1^2 + (-4)^2}} = \frac{|x_0^2 - 3x_0 + 6|}{\sqrt{17}}$$

Il minimo della distanza si avrà, quindi, in corrispondenza del minimo della funzione a numeratore, cioè in  $x_0 = \frac{3}{2}$ . Il punto  $P$  ha quindi coordinate  $\left(\frac{3}{2}; \frac{15}{16}\right)$ .

3. La simmetria rispetto all'asse  $x$  ha equazioni  $\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$ , che sono uguali alle loro inverse, quindi la retta  $s$  ha equazione  $y = -\frac{1}{4}x - \frac{3}{2}$ . Le intersezioni della retta  $s$  con la parabola si trovano risolvendo il sistema

$$\begin{cases} y = -\frac{x}{4} - \frac{3}{2} \\ y = x - \frac{1}{4}x^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = -\frac{x}{4} - \frac{3}{2} \\ x^2 - 5x - 6 = 0 \end{cases}$$

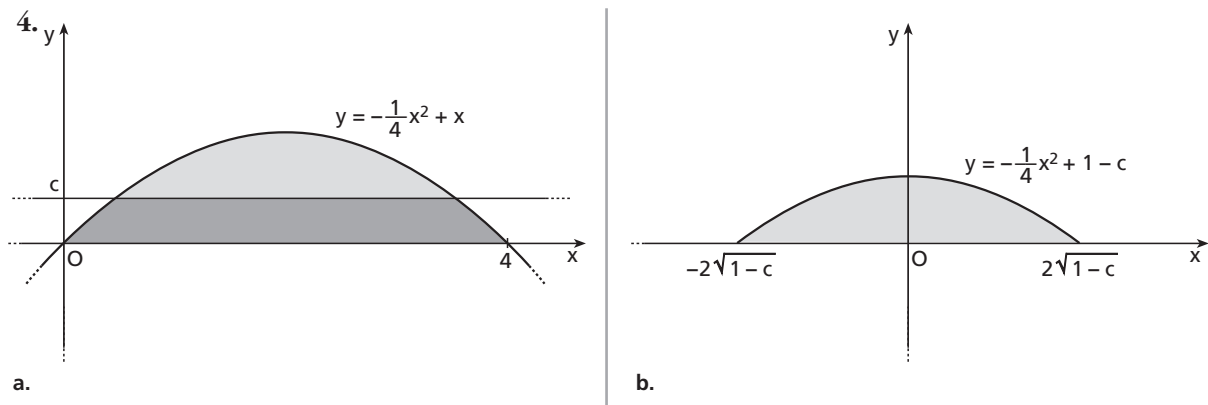
Le soluzioni della seconda equazione sono  $x = -1$  e  $x = 6$ .

L'area della regione di piano definita da due curve e dalle rette  $x = a$  e  $x = b$  ( $b > a$ ) è

$$\int_a^b |f(x) - g(x)| dx.$$

In questo caso

$$\int_{-1}^6 \left[ x - \frac{x^2}{4} + \frac{1}{4}x + \frac{3}{2} \right] dx = \left[ -\frac{x^3}{12} + \frac{5}{8}x^2 + \frac{3}{2}x \right]_{-1}^6 = \frac{343}{24}.$$



L'area della regione superiore in cui viene divisa la regione  $S$  dalla retta  $y=c$  ha area pari all'integrale tra i due punti di intersezione dell'asse  $x$  della parabola  $\lambda$  traslata verso il basso di  $c$ . Per semplificare i calcoli si può operare un'ulteriore traslazione (a sinistra di 2, cioè dell'ascissa del vertice) per portare il vertice sull'asse  $y$ . Le equazioni della traslazione composta sono dunque  $\begin{cases} x' = x - 2 \\ y' = y - c \end{cases} = \begin{cases} x = x' + 2 \\ y = y' + c \end{cases}$ , quindi l'equazione della parabola trasformata è, omettendo gli apici,  $y = -\frac{x^2}{4} + 1 - c$ . Le intersezioni con l'asse  $x$  sono in  $x = \pm 2\sqrt{1-c}$ , quindi l'area risulta  $2 \int_0^{2\sqrt{1-c}} \left[ -\frac{x^2}{4} + 1 - c \right] dx = 2 \left[ -\frac{x^3}{12} + (1-c)x \right]_0^{2\sqrt{1-c}} = \frac{8}{3}(1-c)^{\frac{3}{2}}$  perché la funzione è pari.

Tale area deve essere pari alla metà dell'area della regione  $S$ , che si ottiene sostituendo  $c=0$ , quindi  $\frac{8}{3}(1-c)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{3}$ . Risolvendo si ottiene  $c = 1 - \frac{1}{2}\sqrt[3]{2}$ .

5. Tale volume è l'integrale del quadrato della funzione associata a  $\lambda$  tra 0 e 4.

$$\int_0^4 \left( x - \frac{x^2}{4} \right)^2 dx = \int_0^4 \left( \frac{x^4}{16} - \frac{1}{2}x^3 + x^2 \right) dx = \left[ \frac{x^5}{80} - \frac{x^4}{8} + \frac{x^3}{3} \right]_0^4 = \frac{32}{15}$$