PROBLEMA 2

Nella figura 3 è rappresentato il grafico Γ della funzione continua $f:[0;+\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, derivabile in $[0;+\infty[$, e sono indicate le coordinate di alcuni suoi punti.

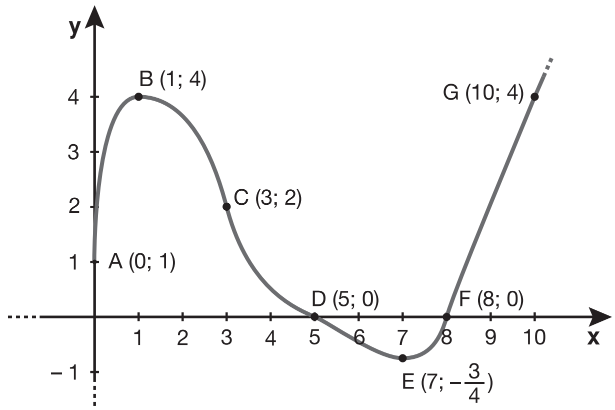


Figura 3

È noto che Γ è tangente all'asse y in A, che B ed E sono un punto di massimo e uno di minimo, che C è un punto di flesso con tangente di equazione $2x+y-8=0$.

Nel punto D la retta tangente ha equazione $x+2y-5=0$ e per $x \geq 8$ il grafico consiste in una semiretta passante per il punto G. Si sa inoltre che l'area della regione delimitata dall'arco $ABCD$, dall'asse x e dall'asse y vale 11, mentre l'area della regione delimitata dall'arco DEF e dall'asse x vale 1.

1. In base alle informazioni disponibili, rappresenta indicativamente i grafici delle funzioni

$$y=f'(x), \qquad F(x)=\int_0^x f(t)\,dt.$$

Quali sono i valori di $f'(3)$ e $f'(5)$? Motiva la tua risposta.

2. Rappresenta, indicativamente, i grafici delle seguenti funzioni:

$$y=|f'(x)|, \qquad y=|f(x)|', \qquad y=\frac{1}{f(x)},$$

specificando l'insieme di definizione di ciascuna di esse.

3. Determina i valori medi di $y=f(x)$ e di $y=|f(x)|$ nell'intervallo [0; 8], il valore medio di $y=f'(x)$ nell'intervallo [1; 7] e il valore medio di $y=F(x)$ nell'intervallo [9; 10].

4. Scrivi le equazioni delle rette tangenti al grafico della funzione $F(x)$ nei suoi punti di ascisse 0 e 8, motivando le risposte.

* La prova è uguale a quella delle scuole italiane all'estero, Europa, 2016.

PROBLEMA 2

1. Per prima cosa determiniamo l'espressione analitica della funzione f per $x \geq 8$.

$$\frac{x-8}{2} = \frac{y}{4} \rightarrow y = 2x - 16.$$

Del grafico di $f'(x)$ possiamo dire che:

- In $x = 0$ deve presentare un asintoto verticale; in particolare $\lim_{x \to 0^+} f'(x) = +\infty$. Questo perché il grafico di $f(x)$ è tangente all'asse y nel punto A e a destra del punto f è crescente.
- Per $0 < x < 1$ risulta $f'(x) > 0$ perché $f(x)$ è crescente.
- In $x = 1$, f' deve essere nulla perché B è un punto stazionario di f.
- In $x = 3$ conosciamo la tangente e sappiamo che essa ha coefficiente angolare -2. Pertanto $f'(3) = -2$. Il punto $(3; -2)$ è un minimo locale per la funzione f'; infatti sappiamo dal testo che C è un flesso di f.
- Anche in $x = 5$ conosciamo la tangente; analogamente al punto sopra, possiamo affermare che $f'(5) = -\frac{1}{2}$.
- Per $1 < x < 7$ risulta $f'(x) < 0$ perché $f(x)$ è decrescente.
- $f'(7) = 0$ perché E è un punto stazionario.
- Per $7 < x < 8$ risulta $f'(x) > 0$ perché $f(x)$ è crescente.
- Per $x \geq 8$ risulta che $f'(x) = 2$ perché la semiretta passante per F e G ha coefficiente angolare 2.

Possiamo dunque tracciare il grafico indicativo della funzione f' (figura 7).

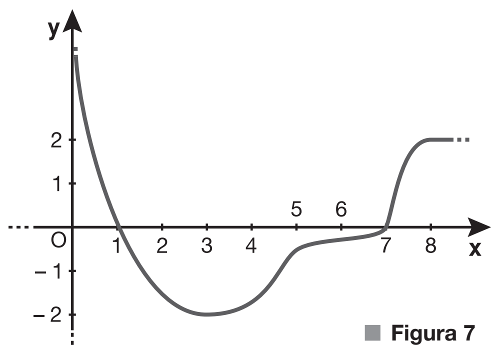


Figura 7

Per tracciare il grafico della funzione integrale F possiamo fare una serie di considerazioni.

- Osserviamo che $F(5) = 11$ e $F(8) = 11 - 1 = 10$. Infatti

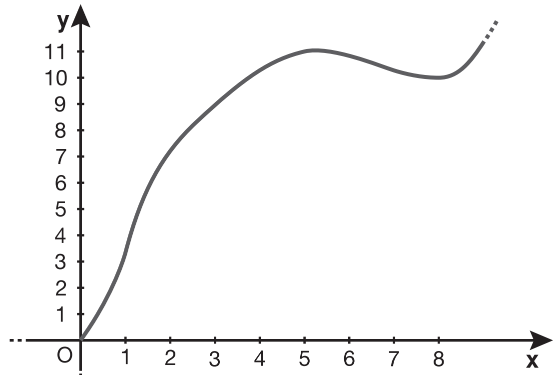
$$F(8) = \int_0^8 f(x)dx = \int_0^5 f(x)dx + \int_5^8 f(x)dx = 11 - 1 = 10.$$

  Ai valori $x = 5$ e $x = 8$ corrisponderanno punti stazionari di F perché sono zeri di f.

- $F'(x) = f(x)$ e quindi $F''(x) = f'(x)$. Dall'analisi del grafico di $f'(x)$ deduciamo che $f'(x) > 0$ per $0 < x < 1$ o $x > 7$ e quindi in questi intervalli $F(x)$ volge la concavità verso l'alto.
- Sul piano qualitativo possiamo dire che in corrispondenza dei valori $x = 1$ e $x = 7$ F presenterà dei flessi perché in B e in E f ha due punti stazionari.
- Per $x \geq 8$ il grafico di F avrà l'andamento della parabola di equazione $y = x^2 - 16x + 74$. Infatti su questo intervallo la funzione f coincide con la semiretta $y = 2x - 16$, dunque:

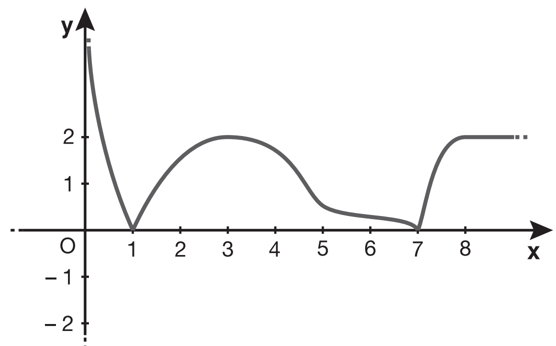
$$F(x) = \int_0^8 f(t)dt + \int_8^x (2t - 16)dt = 10 + [t^2 - 16t]_8^x = x^2 - 16x + 74.$$

Otteniamo quindi una funzione che ha l'andamento qualitativo riportato a lato.
Come già osservato in precedenza, conosciamo i valori di $f'(3)=-2$ e $f'(5)=-\frac{1}{2}$; li avevamo ricavati interpretando la pendenza delle due tangenti assegnate dal testo come valore della derivata di *f*.



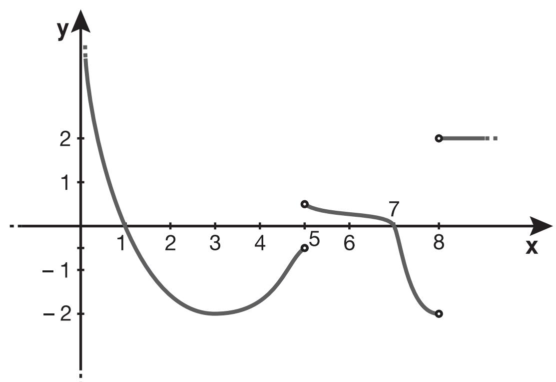
■ **Figura 8**

2. • Per ottenere il grafico di $y=|f'(x)|$ è sufficiente simmetrizzare i valori negativi di f' rispetto all'asse *x*, ribaltandoli dal quarto al primo quadrante.
L'insieme di definizione di $y=|f'(x)|$ coincide con quello di $y=f'(x)$, ed è dunque $]0;+\infty[$ (il valore $x=0$ va escluso perché in corrispondenza di esso *f* presenta un asintoto verticale).



■ **Figura 9**

• Per ottenere il grafico di $y=|f(x)|'$ distinguiamo i valori positivi di *f* da quelli negativi. Per i valori strettamente positivi $|f|=f$, dunque $|f|'=f'$: il grafico ha l'andamento già mostrato in figura 7.
Per i valori strettamente negativi, $|f|=-f$, dunque $|f|'=-f'$: il grafico si ottiene sottoponendo quello di f' alla simmetria di asse *x* già menzionata in precedenza.
Il grafico cercato ha il seguente andamento qualitativo.



■ **Figura 10**

I valori $x=5$ e $x=8$ in cui *f* risulta nulla non appartengono all'insieme di definizione di $|f|'$; infatti $\lim_{x\to5^+}f'(x)\neq\lim_{x\to5^-}f(x)$ e $\lim_{x\to8^+}f'(x)\neq\lim_{x\to8^-}f(x)$ come emerge chiaramente dal grafico. L'insieme di definizione di $y=|f|'$ risulta quindi essere $]0;+\infty[-\{5;8\}$.

• Tracciamo ora il grafico di $y=\frac{1}{f(x)}$. L'insieme di definizione è $]0;+\infty[-\{5;8\}$. Cominciamo col calcolare, dove è possibile, il reciproco dei valori della funzione già noti.

$$A': x_{A'}=x_A=0;\ y_{A'}=\frac{1}{y_A}=1\to A'(0;1)$$

$$B': x_{B'}=x_B=1;\ y_{B'}=\frac{1}{y_B}=\frac{1}{4}\to B'\left(1;\frac{1}{4}\right)$$

$$C': x_{C'}=x_C=3;\ y_{C'}=\frac{1}{y_C}=\frac{1}{2}\to C'\left(3;\frac{1}{2}\right)$$

$$E': x_{E'}=x_E=7;\ y_{E'}=\frac{1}{y_E}=-\frac{4}{3}\to E'\left(7;-\frac{4}{3}\right)$$

$$G': x_{G'}=x_G=10;\ y_{G'}=\frac{1}{y_G}=\frac{1}{4}\to G'\left(10;\frac{1}{4}\right)$$

Inoltre, sappiamo che $\frac{1}{f}$ non si annulla mai ed è positiva quando f è positiva, negativa quando f è negativa. Nei punti D e F f assume valore nullo; pertanto $\frac{1}{f}$ presenterà in corrispondenza di $x = 5$ e $x = 8$ asintoti verticali. Inoltre, $\frac{1}{f}$ cresce quando f decresce e decresce quando f cresce.

Per $x \geq 8$ possiamo scrivere l'espressione analitica di $\frac{1}{f}$: $y = \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{2x - 16}$.

Questa è l'equazione di un'iperbole equilatera di assi $y = 0$ e $x = 8$.
Per avere un'idea più precisa dell'andamento calcoliamo la derivata nei punti in cui abbiamo informazioni sufficienti per farlo.
L'espressione generale della derivata è:

$$y' = -\frac{f'(x)}{f(x)^2}.$$

In $x = 3$ otteniamo $y' = -\frac{-2}{4} = \frac{1}{2}$; in $x = 0$, $\lim_{x \to 0} f'(x) = +\infty$, dunque $\lim_{x \to 0} -\frac{f'(x)}{f(x)^2} = -\infty$.

A questo punto, tracciamo il grafico.

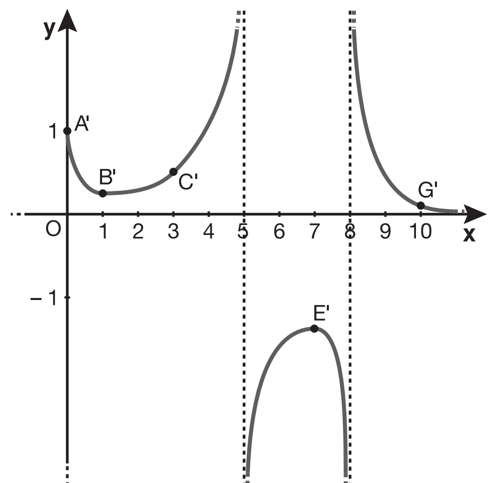


Figura 11

3. Ricordiamo la definizione di media integrale: la media integrale della funzione f sull'intervallo $[x_1; x_2]$ è il rapporto:

$$\frac{\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx}{x_2 - x_1}.$$

Per valutare gli integrali ricorriamo alle informazioni relative alle aree fornite dal testo.
Calcoliamo il valor medio di f nell'intervallo $[0; 8]$:

$$\frac{\int_0^8 f(x)dx}{8} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4} = 1{,}25.$$

Calcoliamo il valor medio di $|f|$ nell'intervallo $[0; 8]$:

$$\frac{\int_0^8 |f(x)|dx}{8} = \frac{11+1}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2} = 1{,}5.$$

Calcoliamo il valor medio di f' nell'intervallo $[1; 7]$ ricorrendo al teorema fondamentale del calcolo integrale:

$$\frac{\int_1^7 f'(x)dx}{6} = \frac{[f(x)]_1^7}{6} = \frac{-\frac{3}{4} - 4}{6} = -\frac{19}{24} = -0{,}791\overline{6}.$$

Per determinare l'ultimo integrale ricordiamo che, nell'intervallo in esame, la funzione F coincide con un arco di parabola di equazione $y = x^2 - 16x + 74$:

$$\frac{\int_9^{10} F(x)dx}{1} = \int_9^{10} (x^2 - 16x + 74)dx =$$

$$= \left[\frac{1}{3}x^3 - 8x^2 + 74x\right]_9^{10} = \frac{1000}{3} - 800 + 740 - 243 + 648 - 666 = 12{,}\overline{3}.$$

4. Essendo F la funzione integrale di f, il coefficiente angolare della tangente a F nel punto di ascissa x è $f(x)$. Infatti per definizione f è la derivata di F.

Deduciamo quindi che la tangente a F in $x = 0$ è una retta di pendenza $1 = f(0)$. Questa retta passa dall'origine perché $F(0) = \int_0^0 f(x)dx = 0$. La retta è dunque $y = x$.
Analogamente la pendenza della tangente in $x = 8$ è 0; poiché $F(8) = 10$, la tangente cercata è la retta orizzontale $y = 10$.