PROBLEMA 2

Data una funzione $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ovunque derivabile, consideriamo la funzione

$$f(x) = g(x)\sin(2x).$$

1. Dimostra che i grafici delle funzioni f e g sono tangenti nei loro punti di ascissa $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, con k numero intero.

2. Determina la funzione $g(x)$ in modo tale che sia soddisfatta l'equazione differenziale $g'(x) = -2g(x)$ e che risulti $g(0) = 4$.

3. Il grafico della funzione f presenta dei massimi relativi nei punti di ascissa $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ (k intero)? Presenta dei flessi in tutti i suoi punti d'intersezione con l'asse x? Motiva le tue risposte.

4. Determina il valore di

$$I = \int_0^{+\infty} f(x)\,dx$$

e, posto

$$H = \int_0^{+\infty} |f(x)|\,dx$$

dimostra che H è finito e determina in modo approssimato il suo valore. Che cosa rappresentano, in termini geometrici, i valori di I e H?

PROBLEMA 2

1. Sia $g(x)$ una funzione derivabile su $\mathbb{R}$ e $f(x) = g(x) \cdot \sin(2x)$. Quindi anche $f(x)$ è derivabile su $\mathbb{R}$ perché prodotto di funzioni derivabili.
Osserviamo che se $g(x) = 0$ anche $f(x) = 0$ e le due funzioni sono tangenti $\forall x \in \mathbb{R}$, in particolare nei punti $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$. Possiamo supporre quindi $g(x) \neq 0$.

   I grafici di $g(x)$ e $f(x)$ sono tangenti se sono contemporaneamente soddisfatte le due condizioni:

$$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f'(x) = g'(x) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} g(x) \cdot \sin(2x) = g(x) \\ g'(x) \cdot \sin(2x) + g(x) \cdot 2\cos(2x) = g'(x) \end{cases}.$$

   $g(x) \neq 0$, quindi dalla prima equazione ricaviamo $\sin(2x) = 1 \rightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \rightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi$. Sostituendo nella seconda equazione otteniamo l'identità $g'\left(\frac{\pi}{4} + k\pi\right) \cdot 1 + g\left(\frac{\pi}{4} + k\pi\right) \cdot 0 = g'\left(\frac{\pi}{4} + k\pi\right)$.

   Concludiamo che i grafici di $g(x)$ e $f(x)$ sono tangenti per $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

2. L'equazione $g'(x) = -2g(x)$ è un'equazione differenziale a variabili separabili.
Osserviamo che la funzione identicamente nulla $g(x) = 0$ è soluzione particolare dell'equazione differenziale ma non soddisfa la condizione iniziale.
Per $g \neq 0$ possiamo risolvere nel seguente modo:

$$\frac{1}{g} dg = -2dx \rightarrow \int \frac{1}{g} dg = \int -2dx \rightarrow \ln|g| = -2x + c \rightarrow$$

$$|g| = e^{-2x+c} \rightarrow g(x) = \pm e^{-2x+c} \rightarrow g(x) = \pm e^{c} \cdot e^{-2x} \rightarrow g(x) = h \cdot e^{-2x},$$

   con h costante reale non nulla.

   Imponiamo la condizione iniziale:

$$g(0) = 4 \rightarrow h \cdot e^{-2 \cdot 0} = 4 \rightarrow h = 4 \rightarrow g(x) = 4e^{-2x}.$$

3. La funzione $f(x)$ da considerare è ora:

$$f(x) = 4e^{-2x} \cdot \sin(2x).$$

   Se i punti di ascissa $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ sono massimi relativi deve essere $f'(x) = 0$.

   Come verificato prima, il grafico di $f(x)$ è tangente a quello di $g(x)$ nei punti di ascissa $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, quindi se $f'(x) = 0$ anche $g'(x) = 0$, ovvero se $g'\left(\frac{\pi}{4} + k\pi\right) = 0$.

   Poiché $g'(x) = -8e^{-2x}$ assume sempre valori negativi e non si annulla mai, deduciamo che $f(x)$ non ha massimi relativi in $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$.

   Per quanto riguarda i flessi, determiniamo in quali punti il grafico di $f(x)$ interseca l'asse x:

$$f(x) = 0 \rightarrow 4e^{-2x} \cdot \sin(2x) = 0 \xrightarrow{e^{-2x} \neq 0} \sin(2x) = 0 \rightarrow 2x = k\pi \rightarrow x = k\frac{\pi}{2}.$$

La funzione $f(x)$ presenta dei flessi in tali punti se in corrispondenza la derivata seconda si annulla:

$$f'(x) = -8e^{-2x} \cdot \sin(2x) + 8e^{-2x}\cos(2x) = 8e^{-2x}[\cos(2x) - \sin(2x)];$$

$$f''(x) = -16e^{-2x}[\cos(2x) - \sin(2x)] + 8e^{-2x}[-2\sin(2x) - 2\cos(2x)] = -32e^{-2x}\cos(2x);$$

$$f''\left(k\frac{\pi}{2}\right) = -32e^{-2k\frac{\pi}{2}}\cos\left(2k\frac{\pi}{2}\right) = -32e^{-k\pi}\cos(k\pi).$$

In particolare:

$$f''\left(k\frac{\pi}{2}\right) = -32e^{-k\pi} \text{ se } k \text{ è pari, } f''\left(k\frac{\pi}{2}\right) = +32e^{-k\pi} \text{ se } k \text{ è dispari.}$$

In ogni modo, la derivata seconda non si annulla nei punti di ascissa $x = k\frac{\pi}{2}$ e quindi la funzione $f(x)$ non ha flessi in tali punti.

4. Consideriamo l'integrale improprio

$$I = \int_0^{+\infty} f(x)dx = \lim_{t \to +\infty} \int_0^t 4e^{-2x} \cdot \sin(2x)dx = \lim_{t \to +\infty}\left[4 \cdot \int_0^t e^{-2x} \cdot \sin(2x)dx\right]$$

e calcoliamo a parte l'integrale indefinito.
Pensando e^{-2x} come fattore differenziale e $\sin(2x)$ come fattore finito, troviamo:

$$\int e^{-2x} \cdot \sin(2x)dx = -\frac{1}{2}\int -2e^{-2x} \cdot \sin(2x)dx =$$

$$-\frac{1}{2}\left[e^{-2x} \cdot \sin(2x) - \int e^{-2x} \cdot 2\cos(2x)dx\right] =$$

$$= -\frac{1}{2}e^{-2x} \cdot \sin(2x) - \frac{1}{2}\int -2e^{-2x} \cdot \cos(2x)dx =$$

$$= -\frac{1}{2}e^{-2x} \cdot \sin(2x) - \frac{1}{2}\left[e^{-2x} \cdot \cos(2x) + \int e^{-2x} \cdot 2\sin(2x)dx\right] =$$

$$= -\frac{1}{2}e^{-2x} \cdot \sin(2x) - \frac{1}{2}e^{-2x} \cdot \cos(2x) - \int e^{-2x} \cdot \sin(2x)dx,$$

da cui:

$$2\int e^{-2x} \cdot \sin(2x)dx = -\frac{1}{2}e^{-2x} \cdot \sin(2x) - \frac{1}{2}e^{-2x} \cdot \cos(2x) \rightarrow$$

$$\int e^{-2x} \cdot \sin(2x)dx = -\frac{1}{4}e^{-2x}[\sin(2x) + \cos(2x)] + e.$$

Possiamo calcolare l'integrale definito:

$$4 \cdot \int_0^t e^{-2x} \cdot \sin(2x)dx = [-e^{-2x}[\sin(2x) + \cos(2x)]]_0^t =$$

$$\{-e^{-2t}[\sin(2t) + \cos(2t)]\} - \{-e^{-2\cdot 0}[\sin(2 \cdot 0) + \cos(2 \cdot 0)]\} =$$

$$1 - e^{-2t}[\sin(2t) + \cos(2t)].$$

Infine, l'integrale improprio risulta:

$$I = \lim_{t \to +\infty}\{1 - e^{-2t}[\sin(2t) + \cos(2t)]\} = 1.$$

Nell'ultimo passaggio si ha

$$\lim_{t \to +\infty}\{-e^{-2t}[\sin(2t) + \cos(2t)]\} = 0$$

perché si tratta del limite del prodotto fra un infinitesimo e una funzione limitata.

Valutiamo il comportamento di

$$H = \int_0^{+\infty} |f(x)|\,dx.$$

Innanzi tutto osserviamo che vale

$$|f(x)| = |4e^{-2x} \cdot \sin(2x)| = 4e^{-2x}|\sin(2x)|,$$

quindi vale la catena di disuguaglianze:

$$f(x) < |f(x)| < 4e^{-2x}.$$

Passando agli integrali otteniamo:

$$\int_0^{+\infty} f(x)dx < \int_0^{+\infty} |f(x)|dx < \int_0^{+\infty} 4e^{-2x}dx \;\rightarrow\; 1 < \int_0^{+\infty} |f(x)|dx < \int_0^{+\infty} 4e^{-2x}dx.$$

poiché il primo integrale della catena rappresenta $I = 1$.
D'altro canto, l'ultimo integrale della disuguaglianza vale:

$$\int_0^{+\infty} 4e^{-2x}dx = \lim_{t\to+\infty} \int_0^{t} 4e^{-2x}dx = \lim_{t\to+\infty} [-2e^{-2x}]_0^t =$$

$$\lim_{t\to+\infty} (-2e^{-2t} + 2) = 2.$$

L'integrale H risulta dunque finito e il suo valore è compreso fra 1 e 2:

$$1 < H < 2.$$

Interpretiamo gli integrali dal punto di vista geometrico.

Il grafico di $f(x)$ in $[0; +\infty[$ individua infinite regioni di piano alternativamente al di sopra e al di sotto dell'asse delle ascisse, ciascuna limitata e di area finita.

Il valore I rappresenta la sommatoria delle aree di tali regioni, considerate col segno positivo se al di sopra dell'asse x e col segno negativo se al di sotto dell'asse x.
Il grafico di $|f(x)|$ individua infinite regioni di piano che si trovano tutte al di sopra dell'asse x. Quindi, per calcolare H, l'area di tutte le regioni viene considerata col segno positivo.

Rappresentiamo in figura la situazione.
Per disegnare il grafico approssimativo di $f(x) = 4e^{-2x} \cdot \sin(2x)$ senza effettuare lo studio della funzione, possiamo osservare che esso è compreso fra i grafici di $y = 4e^{-2x}$ e di $y = -4e^{-2x}$, dove l'oscillazione è individuata da $y = \sin(2x)$.

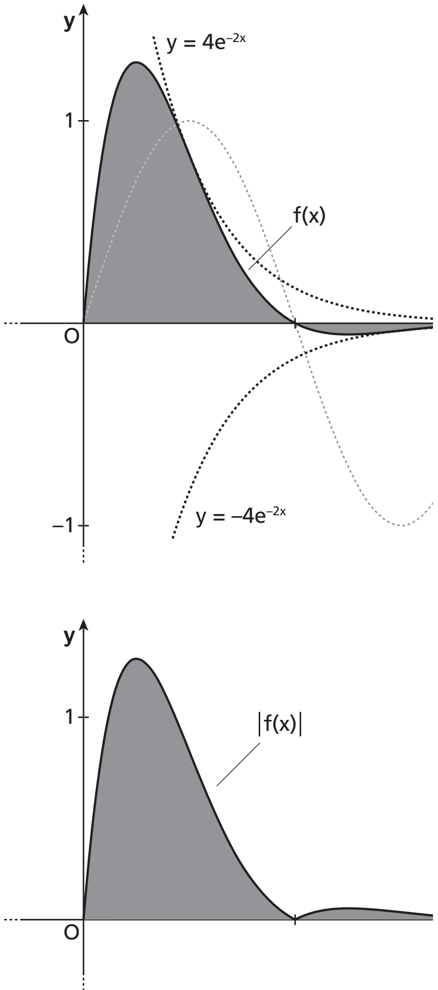

Figura 4