# Liceo scientifico e opzione scienze applicate

## PROBLEMA 2

La funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è così definita:

$$f(x) = \sin(x) - x \cdot \cos(x).$$

**1.** Dimostra che $f$ è una funzione dispari, che per $x \in \left]0; \pi\right]$ si ha $f(x) > 0$ e che esiste un solo valore $x_0 \in \left]0; 2\pi\right]$ tale che $f(x_0) = 0$. Traccia inoltre il grafico della funzione per $x \in [0; 5\pi]$.

**2.** Determina il valore dell'integrale definito:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx$$

e, sapendo che risulta:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f^2(x)\,dx = \frac{\pi^3}{48} - \frac{\pi}{8},$$

prova che risulta verificata la disequazione:

$$\pi^3 + 18\pi < 96$$

anche non conoscendo il valore di $\pi$.

**3.** Verifica che, qualsiasi sia $n \in \mathbb{N}$, risulta:

$$\int_0^{(2n+1)n} f(x)\,dx = 4, \qquad \int_0^{2n\pi} f(x)\,dx = 0.$$

**4.** Dimostra che i massimi della funzione $f^2(x)$ giacciono su una parabola e i minimi su una retta, e scrivi l'equazione della parabola e della retta.

## PROBLEMA 2

**1.** Considerata $f(x) = \sin x - x\cos x$, calcoliamo:

$$f(-x) = \sin(-x) - (-x)\cos(-x) = -\sin x + x\cos x = -(\sin x - x\cos x) = -f(x),$$

quindi la funzione $f(x)$ è dispari.
Determiniamo il segno della funzione ricorrendo allo studio della derivata prima:

$$f'(x) = \cos x - \cos x + x\sin x = x\sin x.$$

Osservato che $y = x$ e $y = \sin x$ sono positive in $]0; \pi[$, e $y = \sin x$ è nulla per $x = \pi$, otteniamo $f'(x) > 0$ in $]0; \pi[$ e $f'(\pi) = 0$. La funzione $f(x)$ è dunque crescente in $]0; \pi[$ e ha un punto stazionario in $x = \pi$. Poiché $f(0) = 0$, deduciamo che $f(x) > 0$ nell'intervallo $]0; \pi[$.

Per l'intervallo $]\pi; 2\pi[$ possiamo invece fare i seguenti ragionamenti: $f'(x) < 0$ in $]\pi; 2\pi[$ e $f'(2\pi) = 0$. La funzione $f(x)$ è dunque decrescente in $]\pi; 2\pi[$ e ha un punto stazionario in $x = 2\pi$, con $f(2\pi) = -2\pi$. Quindi $f(\pi) > 0$, $f(2\pi) < 0$ e $f(x)$ è decrescente in $]\pi; 2\pi[$: per il primo teorema di unicità dello zero, esiste un solo punto $x_0 \in ]\pi; 2\pi[$ tale che $f(x_0) = 0$. Poiché $f(x)$ non ha zeri in $]0; \pi[$, rimane dimostrato che lo zero di $f(x)$ in $]0; 2\pi[$ è unico.
Per disegnare il grafico di $f(x)$ per $x \in [0; 5\pi]$, estendiamo a questo intervallo lo studio della crescenza e della decrescenza della funzione.

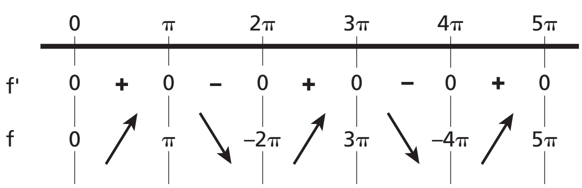


Figura 5

Osserviamo che i minimi e i massimi relativi della funzione $f(x)$ interni all'intervallo $[0; 5\pi]$ giacciono sulle rette di equazione rispettivamente $y = -x$ e $y = x$. Infatti i minimi relativi sono $(2\pi; -2\pi)$ e $(4\pi; -4\pi)$ e i massimi relativi sono $(\pi; \pi)$ e $(3\pi; 3\pi)$. Inoltre anche in $x = 0$ e in $x = 5\pi$, la tangente al grafico della funzione è orizzontale, essendo $f'(0) = f'(5\pi) = 0$. Con le informazioni note possiamo tracciare un grafico approssimativo della funzione $f(x)$, tralasciando lo studio della derivata seconda.

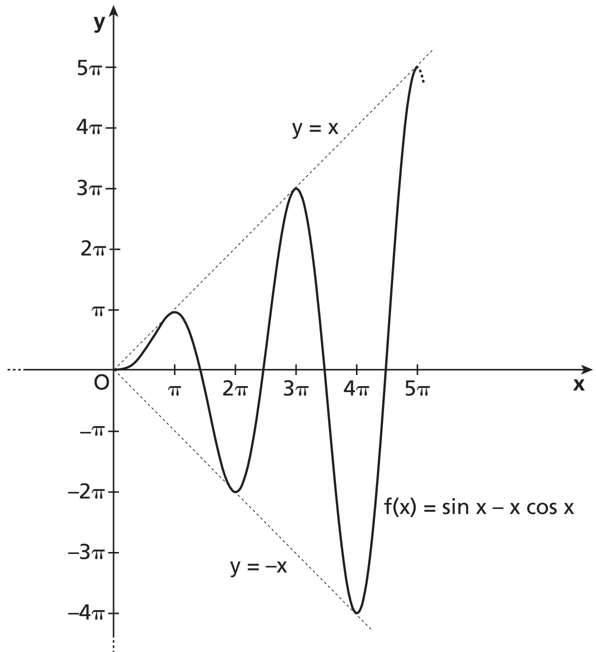


**Figura 6**

**2.** Prima di calcolare l'integrale definito, calcoliamo per parti l'integrale del termine $x\cos x$:

$$\int x\cos x dx = x\sin x - \int \sin x dx = x\sin x + \cos x + c.$$

L'integrale definito risulta allora:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x - x\cos x)dx = [-\cos x - (x\sin x + \cos x)]_0^{\frac{\pi}{2}} = [-2\cos x - x\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$\left(-2\cos\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}\right) - (-2\cos 0 - 0\cdot\sin 0) = 2 - \frac{\pi}{2}.$$

Per dimostrare la disuguaglianza $\pi^3 + 18\pi < 96$, osserviamo che in $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ la funzione $f(x)$ è crescente, con $f(0) = 0$ e $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$. Risulta quindi $0 \leq f(x) \leq 1$ in $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ e pertanto $f^2(x) \leq f(x)$ in $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. In particolare è $f^2(x) < f(x)$ in $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$.

Passando agli integrali otteniamo allora:

$$f^2(x) \leq f(x) \rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} f^2(x)dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx \rightarrow \frac{x^3}{48} - \frac{\pi}{8} < 2 - \frac{\pi}{2} \rightarrow$$

$$\frac{\pi^3 - 6\pi + 24\pi}{48} < \frac{96}{48} \rightarrow \pi^3 + 18\pi < 96.$$

**3.** Ricordando che, per il calcolo precedente, è $\int f(x)dx = -2\cos x - x\sin x + c$, otteniamo $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\int_0^{(2n+1)\pi} f(x)dx = [-2\cos x - x\sin x]_0^{(2n+1)\pi} =$$

$$[-2\cos[(2n+1)\pi] - (2n+1)\pi\cdot\sin[(2n+1)\pi]] - (-2\cos 0 - 0\cdot\sin 0) = +2 + 2 = 4;$$

$$\int_0^{2n\pi} f(x)\,dx = [-2\cos x - x\sin x]_0^{2n\pi} =$$

$$[-2\cos 2n\pi - 2n\pi \cdot \sin 2n\pi] - (-2\cos 0 - 0 \cdot \sin 0) = -2 + 2 = 0.$$

**4.** I ragionamenti fatti al punto 1 per la funzione $f(x)$ per l'intervallo $[0; 5\pi]$ si possono estendere a tutto $\mathbb{R}$:

- $f(x)$ si annulla in $x = 0$ e una e una sola volta in ogni intervallo del tipo $]k\pi; (k+1)\pi[$, con $k \in \mathbb{Z} - \{-1; 0\}$;
- $f(x)$ presenta minimi o massimi relativi in corrispondenza di $x = k\pi$, con $k \in \mathbb{Z} - \{0\}$, e $|f(k\pi)| = |k|\pi$.

Per la funzione $f^2(x)$ possiamo allora dire che:

- $f^2(x) \geq 0$ su $\mathbb{R}$ ed è continua e derivabile in $\mathbb{R}$;
- $f^2(x)$ si annulla dove si annulla $f(x)$, quindi in $x = 0$ e una e una sola volta in ogni intervallo del tipo $]k\pi; (k+1)\pi[$, con $k \in \mathbb{Z} - \{-1; 0\}$;
- $D[f^2(x)] = 2f(x) \cdot f'(x)$, quindi i punti di massimo e minimo relativi vanno cercati tra gli zeri di $f(x)$ e di $f'(x)$. Gli zeri di $f(x)$ sono punti di minimo di $f^2(x)$, quindi i massimi relativi di $f^2(x)$ sono tra gli zeri di $f'(x)$. In particolare, $f^2(x)$ presenta massimi relativi in corrispondenza di $x = k\pi$, con $k \in \mathbb{Z} - \{0\}$, e $f^2(k\pi) = (k\pi)^2$.

Dunque i minimi di $f^2(x)$ giacciono sull'asse delle ascisse, mentre i massimi di $f^2(x)$ giacciono sulla parabola di equazione $y = x^2$.