Liceo scientifico e opzione scienze applicate

PROBLEMA 1

Un gioco si svolge su un tabellone, che è suddiviso in tre settori A, B, C, come in figura 1.

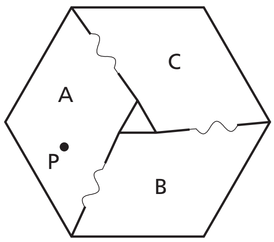

Figura 1

Nei vari settori possono essere collocate alcune pedine. I settori confinano a due a due attraverso tre varchi (rappresentati nella figura con tratti ondulati). Prima di ogni partita, per ciascun varco si effettua un sorteggio che stabilisce se esso sarà aperto oppure chiuso. La probabilità che un varco sia aperto è pari a un certo valore x (lo stesso valore per tutti e tre) ed i tre sorteggi sono tra loro indipendenti.
Durante il gioco, una pedina potrà spostarsi attraversando i varchi aperti. In questo modo, a seconda di quali varchi sono aperti, la pedina P, inizialmente collocata in A, potrebbe raggiungere o tutti e 3 i settori, oppure solo 2 (A e un altro), oppure 1 solo (non può uscire da A).
Indichiamo con $p_1(x)$, $p_2(x)$, $p_3(x)$ le probabilità che i settori raggiungibili dalla pedina P partendo da A siano solo 1, oppure 2, oppure 3.

1. Dimostrare che

$$p_1(x) = (1-x)^2,\ p_2(x) = 2x(1-x)^2,\ p_3(x) = x^3 + 3x^2(1-x)$$

e tracciare, in uno stesso diagramma, i grafici delle funzioni $p_1(x)$, $p_2(x)$, $p_3(x)$ per $x \in [0;1]$.

2. È vero che, qualunque sia $x \in [0;1]$, almeno una delle probabilità $p_1(x)$, $p_2(x)$, $p_3(x)$ deve essere maggiore di 0,3 e almeno una deve essere minore di 0,4?

3. Provare che esiste un unico $x_0 [0;1]$ tale che:

$$p_1(x_0) = p_3(x_0)$$

e stabilire se vale la disuguaglianza:

$$x_0 > \frac{1}{2}.$$

Discutere inoltre, al variare di x in [0; 1], quali delle tre possibilità indicate (che i settori raggiungibili da P siano 1, 2 o 3) sono più probabili e quali meno.

4. Stabilire quali sono i tre valori medi delle funzioni che esprimono le probabilità $p_1(x)$, $p_2(x)$, $p_3(x)$. Nel caso $x = \frac{1}{2}$ quali sono il valore medio e la varianza della variabile casuale che fornisce il numero di settori raggiungibili da P?

PROBLEMA 1

1. Compiliamo una tabella dove indichiamo, per ogni varco, se è aperto o chiuso, il numero di settori raggiungibili dalla pedina partendo da A, e la probabilità che tale evento si verifichi.
Poiché i sorteggi sono indipendenti, la probabilità che si verifichi una data combinazione di varchi aperti/chiusi è data dal prodotto $x^n(1-x)^m$, dove n è il numero di varchi aperti ed m il numero di varchi chiusi.

Varco *A-B*	**Varco *A-C***	**Varco *B-C***	**Numero settori raggiungibili a partire da *A***	**Probabilità**
aperto	aperto	aperto	3	x^3
aperto	aperto	chiuso	3	$x^2(1-x)$
aperto	chiuso	aperto	3	$x^2(1-x)$
aperto	chiuso	chiuso	2	$x(1-x)^2$
chiuso	aperto	aperto	3	$x^2(1-x)$
chiuso	aperto	chiuso	2	$x(1-x)^2$
chiuso	chiuso	aperto	1	$x(1-x)^2$
chiuso	chiuso	chiuso	3	$(1-x)^3$

Gli eventi sono indipendenti, quindi la probabilità che la pedina P, partendo da A, possa raggiungere solo un settore (cioè che non possa uscire dal settore A) è data dalla somma delle probabilità indicate in tabella corrispondenti alle righe «numeri settori = 1».
Otteniamo:

$$p_1(x) = x(1-x)^2 + (1-x)^3 = (1-x)^2(x+1-x) = (1-x)^2.$$

Analogamente, $p_2(x)$ è dato dalla somma delle probabilità indicate in tabella corrispondenti alle righe «numeri settori = 2»:

$$p_2(x) = x(1-x)^2 + x(1-x)^2 = 2x(1-x)^2.$$

Infine:

$$p_3(x) = x^3 + x^2(1-x) + x^2(1-x) + x^2(1-x) = x^3 + 3x^2(1-x).$$

Studiamo le tre funzioni per tracciare i loro grafici in uno stesso diagramma cartesiano nell'intervallo [0; 1].

Tutte le funzioni sono polinomiali, quindi definite e derivabili in [0; 1].

- $p_1(x) = (1-x)^2$ è una parabola di vertice (1; 0) che volge la concavità verso l'alto; la parabola passa per il punto (0; 1).
- $p_2(x) = 2x(1-x)^2 = 2x(1-2x+x^2) = 2x^3 - 4x^2 + 2x$ è una cubica passante per (0; 0) e per il punto di tangenza (1; 0) ($x = 1$ è zero doppio).

  Per determinare il punto estremante in]0; 1[, calcoliamo la derivata prima:

  $$p_2'(x) = 6x^2 - 8x + 2 = 2(3x^2 - 4x + 1).$$

Studiamo il segno:

$$p_2'(x) = 0 \;\rightarrow\; 3x^2 - 4x + 1 = 0 \;\rightarrow\; x = \frac{2 \pm \sqrt{4-3}}{3} = \frac{2 \pm 1}{3} \;\rightarrow\; x_1 = \frac{1}{3} \vee x_2 = 1;$$

$p_2'(x) > 0$ e $p_2(x)$ crescente per $x < \frac{1}{3} \vee x > 1$;

$p_2'(x) < 0$ e $p_2(x)$ decrescente per $\frac{1}{3} < x < 1$.

$p_2(x)$ ammette quindi massimo relativo in $x = \frac{1}{3}$, con $p_2\left(\frac{1}{3}\right) = 2\frac{1}{27} - 4\frac{1}{9} + 2 = \frac{1}{3} = \frac{8}{27}$.

La derivata seconda

$$p_2''(x) = 12x - 8$$

è positiva per

$$12x - 8 > 0 \;\rightarrow\; x > \frac{2}{3},$$

quindi $p_2(x)$ volge la concavità verso l'alto per $x > \frac{2}{3}$ e verso il basso per $x < \frac{2}{3}$.

- $p_3(x) = x^3 + 3x^2(1-x) = x^2(x + 3 - 3x) = x^2(3 - 2x) = -2x^3 + 3x^2$ è una cubica passante per (0; 0), che è punto di tangenza, e (1; 1).
  $p_3'(x) = -6x^2 + 6x = 6x(1-x)$ è positiva in]0; 1[, quindi la funzione è strettamente crescente.
  $p_3''(x) = -12x + 6$ si annulla in $x = \frac{1}{2}$ ed è positiva a sinistra e negativa a destra di $x = \frac{1}{2}$.
  $p_3(x)$ volge quindi la concavità verso l'alto per $x < \frac{1}{2}$ e verso il basso per $x > \frac{1}{2}$.

Possiamo disegnare i tre grafici.

2. Nel grafico precedente abbiamo disegnato anche le rette di equazione $y = 0,3$ e $y = 0,4$.
Osserviamo che la probabilità $p_2(x)$ è sempre minore di 0,4, poiché il massimo di $p_2(x)$ è $\frac{8}{27} \simeq 0,296 < 0,3 < 0,4$.
Quindi, per ogni $x \in [0;1]$, è vero che almeno una delle tre probabilità è minore di 0,4.
Inoltre, la quota del punto di intersezione fra i grafici di $p_1(x)$ e $p_3(x)$ risulta maggiore di 0,3, quindi rimane verificato anche che, per ogni $x \in [0;1]$, almeno una delle probabilità è maggiore di 0,3.

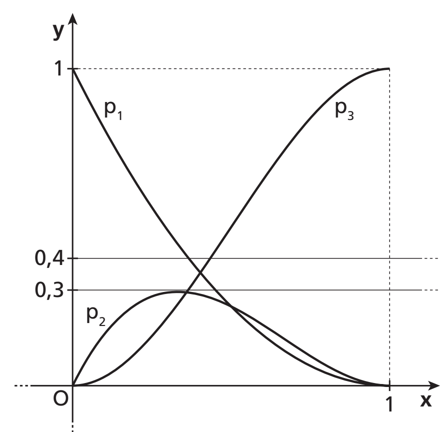

Figura 2

3. Dobbiamo verificare che l'equazione

$$p_1(x) = p_3(x) \;\rightarrow\; (1-x)^2 = -2x^3 + 3x^2 \;\rightarrow\; 2x^3 - 2x^2 - 2x + 1 = 0$$

ammette una sola soluzione in [0; 1] o, in maniera equivalente, dobbiamo mostrare che la funzione

$$f(x) = p_1(x) - p_3(x) = 2x^3 - 2x^2 - 2x + 1$$

interseca l'asse x in un sol punto nell'intervallo [0; 1].
Determiniamo gli intervalli in cui la funzione $f(x)$ è crescente o decrescente.

$$f'(x) = 6x^2 - 4x - 2 = 2(3x^2 - 2x - 1);$$

$$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; 3x^2 - 2x - 1 = 0 \;\rightarrow\; x = \frac{1 \pm \sqrt{1+3}}{3} \;\rightarrow\; x = -\frac{1}{3} \vee x = 1.$$

Poiché $f'(x)$ è negativa per $-\frac{1}{3} < x < 1$, la funzione $f(x)$ è strettamente decrescente in [0; 1].

Inoltre $f(0) = 1 > 0$ e $f(1) = -1 < 0$, quindi per il primo teorema di unicità dello zero possiamo asserire che esiste un solo $x_0 \in\ ]0; 1[$ tale che $f(x_0) = 0$, ovvero tale che $p_1(x_0) = p_3(x_0)$.
Infine, poiché

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 2\frac{1}{8} - 2\frac{1}{4} - 2\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - 1 + 1 = -\frac{1}{4} < 0$$

e la funzione $f(x)$ è decrescente in [0; 1], deduciamo che lo zero x_0 di $f(x)$ deve trovarsi a sinistra di $\frac{1}{2}$, cioè deve essere $x_0 < \frac{1}{2}$.

Il valore di x_0 non lo riusciamo a calcolare in modo esatto per via elementare a partire dall'equazione $2x^3 - 2x^2 - 2x + 1 = 0$. Provando però con il valore 0,4 $\left(\text{che è minore di } \frac{1}{2}\right)$ troviamo

$$2 \cdot 0{,}4^3 - 2 \cdot 0{,}4^2 - 2 \cdot 0{,}4 + 1 \simeq 0{,}008,$$

quindi come prima approssimazione di x_0 possiamo considerare $x_0 \simeq 0{,}4$.

Mettiamo in evidenza nel disegno seguente le intersezioni dei tre grafici. In particolare:
x_0 è l'ascissa del punto di intersezione dei grafici di $p_1(x)$ e $p_3(x)$, come ricavato qui sopra;
x_1 è l'ascissa (non nulla) del punto di intersezione dei grafici di $p_2(x)$ e $p_3(x)$;
x_2 è l'ascissa (diversa da 1) del punto di intersezione dei grafici di $p_1(x)$ e $p_2(x)$.

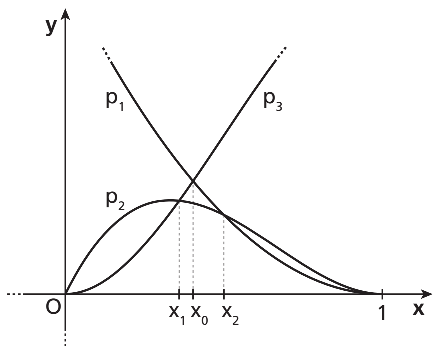

Figura 3

Ricaviamo x_1.

$$p_2(x) = p_3(x) \rightarrow 2x^3 - 4x^2 + 2x = -2x^3 + 3x^2 \rightarrow 4x^3 - 7x^2 + 2x = 0 \rightarrow$$

$$x(4x^2 - 7x + 2) = 0 \xrightarrow[\text{non nulla}]{\text{soluzione}} 4x^2 - 7x + 2 = 0 \rightarrow$$

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 32}}{8} \rightarrow$$

$$x = \frac{7 - \sqrt{17}}{8} \simeq 0{,}36 \vee x = \frac{7 + \sqrt{17}}{8} \simeq 1{,}39 \rightarrow$$

$$x_1 = \frac{7 - \sqrt{17}}{8} \simeq 0{,}36.$$

Ricaviamo x_2.

$$p_1(x) = p_2(x) \rightarrow (1 - x)^2 = 2x(1 - x)^2 \rightarrow$$

$$(2x - 1)(1 - x)^2 = 0 \rightarrow$$

$$x = \frac{1}{2} \vee x = 1 \rightarrow x_2 = \frac{1}{2}.$$

Siamo in grado di discutere, al variare di $x \in [0; 1]$, quali possibilità (numero di settori raggiungibili) sono più probabili e quali meno.
Probabilità maggiori:

- se $0 \leq x < x_0$, è più probabile raggiungere 1 settore;
- se $x_0 < x \leq 1$, è più probabile raggiungere 3 settori;
- se $x = x_0$, è ugualmente probabile raggiungere 1 o 3 settori, e tale probabilità è maggiore che raggiungere 2 settori.

Probabilità minori:

- se $0 < x < x_1$, è meno probabile raggiungere 3 settori;
- se $x_1 < x < x_2$, è meno probabile raggiungere 2 settori;
- se $x_2 < x < 1$, è meno probabile raggiungere 1 settore;
- se $x = 0 \vee x = x_1$, le probabilità inferiori di raggiungere 2 settori o 3 settori si equivalgono;
- se $x = x_2 \vee x = 1$, le probabilità inferiori di raggiungere 2 settori o 1 settore si equivalgono.

In particolare:

- se $x = 0$, tutti i varchi sono chiusi e si ha l'evento certo «la pedina P rimane in A»;
- se $x = 1$, tutti i varchi sono aperti e si ha l'evento certo «la pedina P può raggiungere tutti i settori».

4. In generale, il valore medio di una funzione integrabile $f(x)$ su un intervallo $[a; b]$ è dato da $m = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$.
Nel caso delle tre probabilità troviamo:

$$m_1 = \int_0^1 p_1(x)dx = \int_0^1 (x^2 - 2x + 1)dx = \left[\frac{x^3}{3} - x^2 + x\right]_0^1 = \frac{1}{3} - 1 + 1 = \frac{1}{3};$$

$$m_2 = \int_0^1 p_2(x)dx = \int_0^1 (2x^3 - 4x^2 + 2x)dx = \left[\frac{x^4}{2} - \frac{4}{3}x^3 + x^2\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{4}{3} + 1 = \frac{1}{6};$$

$$m_3 = \int_0^1 p_3(x)dx = \int_0^1 (-2x^3 + 3x^2)dx = \left[-\frac{x^4}{2} + x^3\right]_0^1 = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}.$$

Poniamo ora $x = \frac{1}{2}$ e consideriamo la variabile casuale S = «numero dei settori raggiungibili», che può assumere i valori $s_1 = 1$, $s_2 = 2$ e $s_3 = 3$.
Le probabilità associate alla variabile S sono:

$$p_1 = p(S = 1) = p_1\left(\frac{1}{2}\right) = \left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4};$$

$$p_2 = p(S = 2) = p_2\left(\frac{1}{2}\right) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 4\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4};$$

$$p_3 = p(S = 3) = p_3\left(\frac{1}{2}\right) = -2\left(\frac{1}{2}\right)^3 + 3\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}.$$

Il valore medio è:

$$m = s_1 \cdot p_1 + s_2 \cdot p_2 + s_3 \cdot p_3 = 1 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{9}{4} = 2{,}25.$$

La varianza è:

$$\text{var} = (s_1 - m)^2 \cdot p_1 + (s_2 - m)^2 \cdot p_2 + (s_3 - m)^2 \cdot p_3 =$$

$$\left(1 - \frac{9}{4}\right)^2 \cdot \frac{1}{4} + \left(2 - \frac{9}{4}\right)^2 \cdot \frac{1}{4} + \left(3 - \frac{9}{4}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{11}{16} = 0{,}6875.$$