Scuole italiane all'estero • Europa

5 Risolvere l'integrale improprio: $\int_0^1 \ln(x)\,dx$.

5 La funzione $\ln(x)$ è continua per $x > 0$, quindi $\int_0^1 \ln(x)dx$ è un integrale improprio perché $\ln(x)$ non è continua nell'estremo inferiore di integrazione. Risolviamo l'integrale indefinito:

$$\int \ln x\,dx = x\ln x - \int x\frac{1}{x}dx = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + c.$$

Calcoliamo ora l'integrale improprio assegnato:

$$\int_0^1 \ln x\,dx = \lim_{h\to 0^+}\int_h^1 \ln x\,dx = \lim_{h\to 0^+}[x\ln x - x]_h^1 = \lim_{h\to 0^+}[(1\cdot\ln 1 - 1) - (h\cdot\ln h - h)] =$$

$$\lim_{h\to 0^+}(-1 - h\cdot\ln h + h).$$

Nella forma indeterminata $0\cdot\infty$ dovuta al termine $h\ln h$, prevale l'infinitesimo h rispetto all'infinito $\ln h$, quindi:

$$\lim_{h\to 0^+}(-1 - h\cdot\ln h + h) = -1 - 0 + 0 = -1.$$

L'integrale improprio vale -1.