Liceo scientifico e opzione scienze applicate

1 Definito il numero E come:

$$E = \int_0^1 xe^x \, dx,$$

dimostrare che risulta:

$$\int_0^1 x^2 e^x \, dx = e - 2E,$$

ed esprimere

$$\int_0^1 x^3 e^x \, dx$$

in termini di e ed E.

1 Per calcolare i due integrali definiti usiamo la formula di integrazione per parti:

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx.$$

Consideriamo l'integrale $\int_0^1 x^2 e^x dx$ e poniamo $f(x) = x^2$ e $g'(x) = e^x$.

Osserviamo che $g(x) = g'(x) = e^x$ e che $f'(x) = 2x$. Otteniamo:

$$\int_0^1 x^2 e^x dx = [x^2 e^x]_0^1 - \int_0^1 2xe^x dx =$$

$$[x^2 e^x]_0^1 - 2\int_0^1 xe^x dx =$$

$$[x^2 e^x]_0^1 - 2E =$$

$$1^2 \cdot e^1 - 0^2 \cdot e^0 - 2E =$$

$$e - 2E.$$

Passiamo al secondo integrale, $\int_0^1 x^3 e^x dx$, e poniamo $f(x) = x^3$ e $g'(x) = e^x$.
Applichiamo nuovamente la formula di integrazione per parti:

$$\int_0^1 x^3 e^x dx = [x^3 e^x]_0^1 - \int_0^1 3x^2 e^x dx =$$

$$[x^3 e^x]_0^1 - 3\int_0^1 x^2 e^x dx =$$

$$[x^3 e^x]_0^1 - 3(e - 2E) =$$

$$1^3 \cdot e^1 - 0^2 \cdot e^0 - 3e + 6E =$$

$$e - 3e + 6E =$$

$$-2e + 6E.$$