10 Sia la derivata seconda di una funzione reale $f(x)$ data da $f''(x) = 3x - 6$. Determinare l'espressione di $f(x)$, sapendo che il grafico della funzione passa per il punto $P(2; -7)$ e che l'angolo formato dalla tangente al grafico di $f(x)$ con l'asse y nel punto di ascissa $x = 0$ vale 45°.

10 La funzione $f''(x)$ è polinomiale, quindi definita e integrabile in $\mathbb{R}$. La sua primitiva coincide con la derivata prima di $f(x)$:

$$f'(x) = \int f''(x)dx = \int (3x-6)dx = \frac{3}{2}x^2 - 6x + c.$$

Poiché l'angolo formato dalla tangente al grafico di $f(x)$ con l'asse y nel punto di ascissa 0 vale 45°, si ha:

$$f'(0) = \pm \tan\frac{\pi}{4} \rightarrow c = \pm 1,$$

a seconda che l'angolo sia considerato in senso antiorario o orario.

Risulta dunque: $f'(x) = \frac{3}{2}x^2 - 6x \pm 1$.

$f(x)$ si ottiene integrando $f'(x)$:

$$f(x) = \int f'(x)dx = \int \left(\frac{3}{2}x^2 - 6x \pm 1\right)dx = \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 \pm x + d, \quad \text{con } d \in \mathbb{R}.$$

Imponiamo il passaggio per $(2; -7)$:

$$f(2) = -7 \rightarrow \frac{2^3}{2} - 3 \cdot 2^2 \pm 2 + d = -7 \rightarrow 4 - 12 \pm 2 + d = -7 \rightarrow d = 1 \mp 2.$$

Abbiamo quindi due casi:

- se $c = +1$, allora $d = 1 - 2 = -1$ e $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 + x - 1$;
- se $c = -1$, allora $d = 1 + 2 = 3$ e $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 - x + 3$.