Scuole italiane all'estero • Europa

1 La funzione $f(x)$ è continua per $x \in [-4; 4]$ il suo grafico è la spezzata passante per i punti:

(−4; 0), (−3; 1), (−2; 0), (0; −2), (1; 0), (3; 2), (4; 1).

Qual è il valor medio di $f(x)$ per $x \in [-4; 4]$?

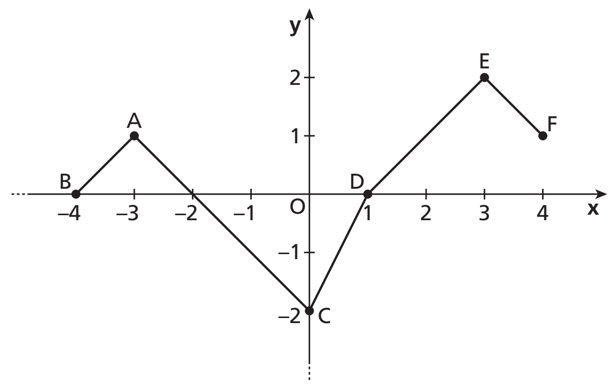

Figura 2

1 In generale, il valor medio di una funzione, integrabile, su un intervallo $[a; b]$ è dato dall'integrale:

$$m = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

L'espressione analitica della funzione rappresentata nel grafico è:

$$f(x) = \begin{cases} x+4 & \text{se } -4 \leq x < -3 \\ -x-2 & \text{se } -3 \leq x < 0 \\ 2x-2 & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ x-1 & \text{se } 1 \leq x < 3 \\ -x+5 & \text{se } 3 \leq x \leq 4 \end{cases}.$$

Il valor medio sull'intervallo $[-4; 4]$ di tale funzione è:

$$m = \frac{1}{8}\left[\int_{-4}^{-3}(x+4)dx + \int_{-3}^{0}(-x-2)dx + \int_0^1(2x-2)dx + \int_1^3(x-1)dx + \int_3^4(5-x)dx\right] =$$

$$\frac{1}{8}\left\{\left[\frac{x^2}{2}+4x\right]_{-4}^{-3} + \left[-\frac{x^2}{2}-2x\right]_{-3}^{0} + \left[x^2-2x\right]_0^1 + \left[\frac{x^2}{2}-x\right]_1^3 + \left[5x-\frac{x^2}{2}\right]_3^4\right\} =$$

$$\frac{1}{8}\left(\frac{9}{2}-12-\frac{16}{2}+16+\frac{9}{2}-6+1-2+\frac{9}{2}-3-\frac{1}{2}+1+20-\frac{16}{2}-15+\frac{9}{2}\right) = \frac{3}{16}.$$

In alternativa, se ricordiamo il significato geometrico dell'integrale (area della regione sottesa al grafico della funzione, col segno meno se il grafico della funzione si trova al di sotto dell'asse x), potevamo calcolare il valor medio della funzione nel seguente modo:

$$m = \frac{1}{8}\left[\int_{-4}^{-2} f(x)dx + \int_{-2}^{1} f(x)dx + \int_1^3 f(x)dx + \int_3^4 f(x)dx\right] =$$

$$\frac{1}{8}\left[\frac{2\cdot 1}{2} - \frac{3\cdot 2}{2} + \frac{2\cdot 2}{2} + \frac{(2+1)\cdot 1}{2}\right] = \frac{1}{8}\left(1-3+2+\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{16}.$$