

**1** Definito il numero  $E$  come:

$$E = \int_0^1 x e^x dx,$$

dimostrare che risulta:

$$\int_0^1 x^2 e^x dx = e - 2E,$$

ed esprimere

$$\int_0^1 x^3 e^x dx$$

in termini di  $e$  ed  $E$ .

**1** Per calcolare i due integrali definiti usiamo la formula di integrazione per parti:

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx.$$

Consideriamo l'integrale  $\int_0^1 x^2 e^x dx$  e poniamo  $f(x) = x^2$  e  $g'(x) = e^x$ .

Osserviamo che  $g(x) = g'(x) = e^x$  e che  $f'(x) = 2x$ . Otteniamo:

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^2 e^x dx &= [x^2 e^x]_0^1 - \int_0^1 2x e^x dx = \\ &= [x^2 e^x]_0^1 - 2 \int_0^1 x e^x dx = \\ &= [x^2 e^x]_0^1 - 2E = \\ &= 1^2 \cdot e^1 - 0^2 \cdot e^0 - 2E = \\ &= e - 2E.\end{aligned}$$

Passiamo al secondo integrale,  $\int_0^1 x^3 e^x dx$ , e poniamo  $f(x) = x^3$  e  $g'(x) = e^x$ .

Applichiamo nuovamente la formula di integrazione per parti:

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^3 e^x dx &= [x^3 e^x]_0^1 - \int_0^1 3x^2 e^x dx = \\ &= [x^3 e^x]_0^1 - 3 \int_0^1 x^2 e^x dx = \\ &= [x^3 e^x]_0^1 - 3(e - 2E) = \\ &= 1^3 \cdot e^1 - 0^2 \cdot e^0 - 3e + 6E = \\ &= e - 3e + 6E = \\ &= -2e + 6E.\end{aligned}$$