

7 Calcolare il valor medio della funzione

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & 1 \leq x \leq 3 \\ e^{x-3} + 1 & 3 < x \leq 6 \end{cases}$$

nell'intervallo $[1; 6]$ e determinare il valore della x in cui la funzione assume il valore medio.

- 7** Per applicare il teorema della media dobbiamo prima verificare che $f(x)$ è continua in $[1; 6]$. I due tratti sono funzioni continue su \mathbb{R} e in particolare sui rispettivi intervalli di definizione. Quindi dobbiamo verificare la continuità solo nel punto $x = 3$ di raccordo tra i due tratti.
Calcoliamo i limiti destro e sinistro in $x = 3$:

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} (x - 1) = f(3); \quad \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} (e^{x-3} + 1) = f(3).$$

I due limiti coincidono, quindi f è continua in $[1; 6]$.

Calcoliamo il valor medio della funzione $f(x)$:

$$m = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = \frac{1}{6-1} \left[\int_1^3 (x-1) dx + \int_3^6 (e^{x-3} + 1) dx \right] = \frac{1}{5} \left\{ \left[\frac{x^2}{2} - x \right]_1^3 + [e^{x-3} + x]_3^6 \right\} =$$

$$\frac{1}{5} \left[\left(\frac{9}{2} - 3 \right) - \left(\frac{1}{2} - 1 \right) + (e^3 + 6) - (e^0 + 3) \right] = \frac{e^3 + 4}{5}.$$

Cerchiamo la controimmagine di $\frac{e^3 + 4}{5} \simeq 4,82$.

Osserviamo che per $1 \leq x \leq 3$ è $0 \leq f(x) = x - 1 \leq 2$, quindi la controimmagine di $\frac{e^3 + 4}{5}$ va cercata nell'intervallo $]3; 6]$.

$$f(x) = \frac{e^3 + 4}{5} \rightarrow e^{x-3} + 1 = \frac{e^3 + 4}{5} \rightarrow e^{x-3} = \frac{e^3 - 1}{5} \rightarrow x = 3 + \ln \frac{e^3 - 1}{5} \simeq 4,34.$$