PROBLEMA 2

Fissato $k \in \mathbb{R}$, la funzione $g_k\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è così definita: $g_k(x) = e^{-k \cdot x^2}$.

Si indica con Γ_k il suo grafico, in un riferimento cartesiano O_{xy}.

1. Descrivi, a seconda delle possibili scelte di $k \in \mathbb{R}$, l'andamento della funzione g_k.

2. Determina per quali $k \in \mathbb{R}$ il grafico Γ_k possiede punti di flesso e dimostra che, in tali casi, le ordinate dei punti di flesso non dipendono dal valore di k e che le rette tangenti nei punti di flesso, qualunque sia k, passano tutte per il punto $T\left(0; \frac{2}{\sqrt{e}}\right)$.

Assumi nel seguito $k > 0$. Sia S_k la regione di piano compresa tra l'asse x e Γ_k.

3. Prova che esiste un unico rettangolo R_k di area massima, tra quelli inscritti in S_k e aventi un lato sull'asse x, e che tale rettangolo ha tra i suoi vertici i punti di flesso di Γ_k. È possibile scegliere k in modo che tale rettangolo R_k sia un quadrato?

4. Posto

$$G(t) = 2\pi \int_0^t x \cdot e^{-x^2} dx,$$

determina il valore di $\lim_{t \to +\infty} G(t)$, e interpreta il risultato in termini geometrici.

PROBLEMA 2

1. Determiniamo le caratteristiche generali di $g_k(x) = e^{-kx^2}$, $\forall k \in \mathbb{R}$:

- dominio: $\mathbb{R}$;
- $g_k(-x) = g_k(x)$, quindi la funzione è pari e simmetrica rispetto all'asse y;
- tutte le curve passano per $V(0; 1)$;
- $g_k(x) > 0 \;\; \forall x \in \mathbb{R}$ quindi il suo grafico appartiene al primo e secondo quadrante.

Casi particolari

- **Caso $k = 0$.**
  $y = e^0 \to y = 1$. La funzione è costante, non ammette asintoti. Non esistono punti di massimo, minimo e flesso.

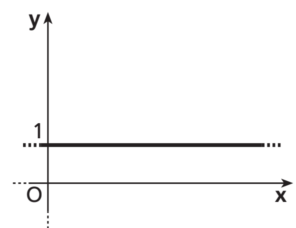

Figura 6

- **Caso $k > 0$.**
  Asintoti
  $\lim\limits_{x \to \pm\infty} e^{-kx^2} = 0 \to y = 0$ è l'asintoto orizzontale. Non esistono asintoti obliqui.

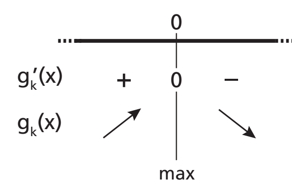

Figura 7

Studio di $g_k'(x)$
$g_k'(x) = -2kxe^{-kx^2}$. Visto che sia k sia e^{-kx^2} sono quantità positive, otteniamo $g_k'(x) \geq 0$ per $x \leq 0$. Il punto $V(0; 1)$ è di massimo assoluto.

Studio di $g_k''(x)$
$g_k''(x) = -2k[e^{-kx^2} + x(-2kx)e^{-kx^2}] \to$
$g_k''(x) = 2ke^{-kx^2}(2kx^2 - 1)$.

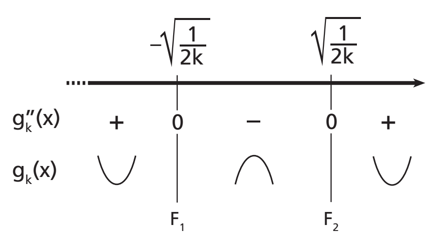

Figura 8

Visto che $2ke^{-kx^2} > 0 \; \forall x \in \mathbb{R}$, otteniamo:

$$g_k''(x) \geq 0 \to 2kx^2 - 1 \geq 0 \to x \leq -\sqrt{\frac{1}{2k}} \vee x \geq \sqrt{\frac{1}{2k}}.$$

I punti di flesso sono $F_1\left(-\sqrt{\frac{1}{2k}}; \sqrt{\frac{1}{e}}\right)$ e $F_2\left(\sqrt{\frac{1}{2k}}; \sqrt{\frac{1}{e}}\right)$.

Disegniamo il grafico nel caso $k = 1 : y = e^{-x^2}$.

Osserviamo che la curva ammette un punto di massimo assoluto in $V(0; 1)$, due flessi nei punti $F_1\left(-\sqrt{\frac{1}{2}}; \sqrt{\frac{1}{e}}\right)$ e $F_2\left(\sqrt{\frac{1}{2}}; \sqrt{\frac{1}{e}}\right)$ e l'asintoto orizzontale di equazione $y = 0$.

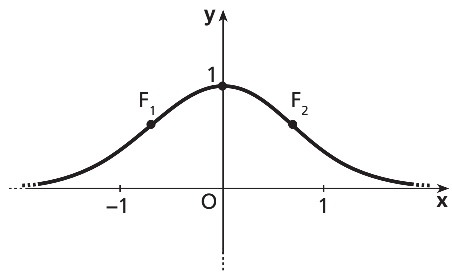

Figura 9

- **Caso $k < 0$.**

Asintoti

$\lim_{x \to \pm\infty} e^{-kx^2} = +\infty \to$ non esiste asintoto orizzontale.

Vediamo se esiste l'asintoto obliquo.

$m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{e^{-kx^2}}{x} = \pm\infty \to$ perché l'esponenziale è un infinito di ordine superiore rispetto a x.

Quindi non esiste asintoto obliquo.

Studio di $g'_k(x)$

$g'_k(x) = -2kxe^{-kx^2}$. Visto che $k < 0$ e $e^{-kx^2} > 0 \; \forall x \in \mathbb{R}$, allora $g'_k(x) \geq 0$ per $x \geq 0$. Il punto $V(0; 1)$ è di minimo assoluto.

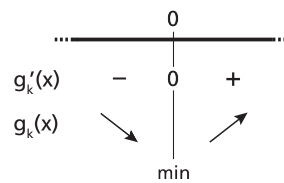

Figura 10

Studio di $g''_k(x)$

$g''_k(x) = -2k[e^{-kx^2} + x(-2kx)e^{-kx^2}] \to g''_k(x) = 2ke^{-kx^2}(2kx^2 - 1)$.

Osserviamo che $2ke^{-kx^2} < 0 \; \forall x \in \mathbb{R}$ e che $2kx^2 - 1 < 0 \; \forall x \in \mathbb{R}$.

Quindi non esistono punti di flesso e il grafico volge la concavità verso l'alto.

Disegniamo il grafico nel caso $k = -1 : y = e^{x^2}$.

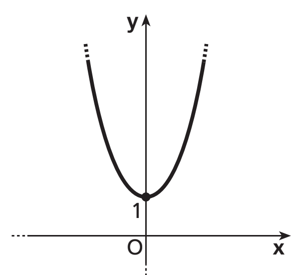

Figura 11

2. Abbiamo mostrato nel punto 1 che i punti di flesso esistono per $k > 0$, hanno coordinate $F_{1,2}\left(\pm\sqrt{\frac{1}{2k}}; \sqrt{\frac{1}{e}}\right)$ e l'ordinata è indipendente da k.

Determiniamo ora le rette tangenti nei due punti di flesso. Calcoliamo il valore della derivata prima per i valori delle ascisse dei punti di flesso:

$$g'_k\left(\pm\sqrt{\frac{1}{2k}}\right) = -2k\left(\pm\sqrt{\frac{1}{2k}}\right)e^{-k\left(\pm\sqrt{\frac{1}{2k}}\right)^2} = \mp\sqrt{\frac{2k}{e}}.$$

Scriviamo l'equazione del fascio di rette passanti per i punti di flesso F_1 e F_2 e aventi coefficiente angolare $\mp\sqrt{\frac{2k}{e}}$. Otteniamo:

$$y - \sqrt{\frac{1}{e}} = \mp\sqrt{\frac{2k}{e}}\left(x \mp \sqrt{\frac{1}{2k}}\right) \to y = \mp\sqrt{\frac{2k}{e}}x + \frac{2}{\sqrt{e}}.$$

Queste rette, per ogni valore di $k > 0$, passano per il punto $T\left(0; \frac{2}{\sqrt{e}}\right)$.

3. Consideriamo un generico rettangolo inscritto in S_k con un lato sull'asse x. Indichiamo con A il punto $(h; 0)$ con $h > 0$. Per simmetria, il punto $D(-h; 0)$ è un altro vertice del rettangolo.
Gli altri due vertici del rettangolo appartegono alla curva Γ_k e quindi avranno coordinate $B(h; e^{-kh^2})$ e $C(-h; e^{-kh^2})$.

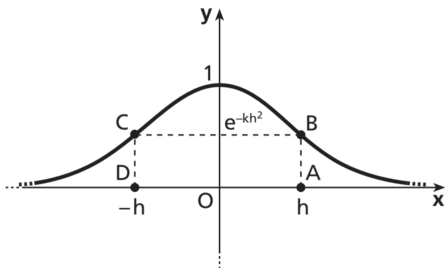

Figura 12

L'area del rettangolo $ABCD$ è $2he^{-kh^2}$. Consideriamo tale area come una funzione $y(h)$ e deriviamola per provare che esiste un unico rettangolo di area massima

$$y'(h) = 2(e^{-kh^2} - 2h^2ke^{-kh^2}) = 2e^{-kh^2}(1 - 2h^2k).$$

Studiamo il segno della derivata prima:

$$y'(h) \geq 0 \rightarrow 2e^{-kh^2}(1 - 2h^2k) \geq 0 \rightarrow 1 - 2h^2k \geq 0 \rightarrow$$

$$h^2 \leq \frac{1}{2k} \rightarrow -\sqrt{\frac{1}{2k}} \leq h \leq \sqrt{\frac{1}{2k}}.$$

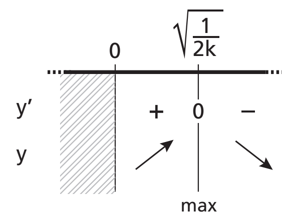

Figura 13

Poiché $h > 0$, la soluzione è limitata al solo intervallo $0 \leq h \leq \sqrt{\frac{1}{2k}}$ e quindi nel punto $h = \sqrt{\frac{1}{2k}}$ si avrà un punto di massimo relativo.

Esiste quindi un solo rettangolo di area massima e tale area vale

$y\left(\sqrt{\frac{1}{2k}}\right) = 2\sqrt{\frac{1}{2k}}\, e^{-k\frac{1}{2k}} = 2\sqrt{\frac{1}{2k}}\, e^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{ke}}$. Notiamo che i punti $B(h; e^{-kh^2})$ e $C(-h; e^{-kh^2})$ per $h = \sqrt{\frac{1}{2k}}$ coincidono con i punti di flesso $F_{1,2}\left(\pm\sqrt{\frac{1}{2k}}; \sqrt{\frac{1}{e}}\right)$.

Rimane ora da dimostrare se il rettangolo di area massima può essere un quadrato. Tale condizione è verificata se $\overline{AB} = \overline{BC}$, ossia

$$2h = e^{-kh^2} \rightarrow 2\sqrt{\frac{1}{2k}} = e^{-k\frac{1}{2k}} \rightarrow \sqrt{\frac{2}{k}} = e^{-\frac{1}{2}} \rightarrow \frac{2}{k} = \frac{1}{e} \rightarrow k = 2e.$$

4. Calcoliamo l'integrale richiesto:

$$G(t) = 2\pi\int_0^t xe^{-x^2}dx = -\frac{2\pi}{2}\int_0^t -2xe^{-x^2}dx = -\pi[e^{-x^2}]_0^t = -\pi e^{-t^2} + \pi.$$

Passando al limite otteniamo:

$$\lim_{t\to+\infty} G(t) = \lim_{t\to+\infty}(-\pi e^{-t^2} + \pi) = \pi.$$

Dal punto di vista geometrico possiamo interpretare l'integrale dato come un modo per determinare il volume di un cilindro ottenuto dalla rotazione attorno all'asse y della regione di piano compresa tra l'asse

x, l'asse y, la retta di equazione $x = t$ e la curva di equazione $y = e^{-x^2}$.
Nel momento in cui si chiede di passare al limite il risultato dell'integrale, si può interpretare il risultato come il volume del solido ottenuto dalla rotazione attorno all'asse y della regione del primo quadrante sottesa alla curva di equazione $y = e^{-x^2}$.