

- 8** Data una funzione $f(x)$ definita in \mathbb{R} , $f(x) = e^x(2x + x^2)$, individuare la primitiva di $f(x)$ il cui grafico passa per il punto $(1; 2e)$.

* La prova è uguale a quella delle scuole italiane all'estero, Europa, 2016.

- 8 Consideriamo la funzione $f(x) = e^x(2x + x^2)$ definita in \mathbb{R} . Determiniamo l'insieme di tutte le sue primitive $G(x) = F(x) + c$ con $c \in \mathbb{R}$ calcolando l'integrale indefinito:

$$G(x) = \int f(x) dx = \int e^x(2x + x^2) dx.$$

Calcoliamo l'integrale applicando più volte il metodo di integrazione per parti:

$$\begin{aligned} \int e^x(2x + x^2) dx &= e^x(2x + x^2) - \int (2 + 2x)e^x dx = 2xe^x + x^2e^x - (2 + 2x)e^x + \int 2e^x dx = \\ &2xe^x + x^2e^x - 2e^x - 2xe^x + 2e^x + c = x^2e^x + c. \end{aligned}$$

La famiglia delle primitive è dunque:

$$G(x) = x^2e^x + c.$$

Imponiamo al grafico di $G(x)$ il passaggio per il punto $(1; 2e)$:

$$G(1) = 2e \rightarrow e + c = 2e \rightarrow c = e.$$

La primitiva cercata è:

$$G(x) = x^2e^x + e.$$