Liceo scientifico e opzione scienze applicate

1 Data la funzione integrale $\int_1^x \ln(t)\,dt$, determinare per quali valori di x il suo grafico incontra la retta di equazione $y = 2x + 1$.

1 La funzione integranda $\ln x$ è continua e integrabile per $x > 0$, ma non è definita in $x = 0$.
Calcoliamo per parti $F(x)$ per $x > 0$ e poi verifichiamo se la funzione $\ln x$ è integrabile in senso improprio per $x \geq 0$.

$$F(x) = \int_1^x \ln t\, dt = \int_1^x 1 \cdot \ln t\, dt = [t \ln t]_1^x - \int_1^x t \cdot \frac{1}{t} dt =$$
$$[t \ln t - t]_1^x = x \ln x - x + 1 \quad \text{per } x > 0.$$

Prendiamo ora un numero c reale positivo.

$$\lim_{c \to 0^+} \int_1^c \ln t\, dt = \lim_{c \to 0^+} [t \ln t - t]_1^c = \lim_{c \to 0^+} (c \ln c - c + 1) = \lim_{c \to 0^+} c \ln c + 1.$$

Poiché $\lim_{c \to 0^+} c \ln c$ si presenta in una forma indeterminata, applichiamo la regola di De L'Hospital:

$$\lim_{c \to 0^+} c \ln c = \lim_{c \to 0^+} \frac{\ln c}{\frac{1}{c}} = \lim_{c \to 0^+} \frac{\frac{1}{c}}{-\frac{1}{c^2}} = \lim_{c \to 0^+}(-c) = 0.$$

Quindi:

$$\lim_{c \to 0^+} \int_1^c \ln t\, dt = 0 + 1 = 1 \text{ e } \ln x \text{ è integrabile in senso improprio su } [0; +\infty[.$$

Per determinare le intersezioni tra $F(x)$ e la retta $y = 2x + 1$ risolviamo l'equazione:

$$F(x) = 2x + 1 \quad \text{per } x \geq 0.$$

Si ha: $x \ln x - x + 1 = 2x + 1 \rightarrow x \ln x - 3x - 0 \rightarrow x(\ln x - 3) = 0 \rightarrow x = 0 \vee x = e^3$.

Entrambe le soluzioni sono accettabili perché appartenenti al dominio della funzione integrale.

I punti di intersezione sono $(0; 1)$ e $(e^3; 2e^3 + 1)$.