

1 È noto che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

Stabilire se il numero reale u , tale che:

$$\int_{-\infty}^u e^{-x^2} dx = 1$$

è positivo oppure negativo. Determinare inoltre i valori dei seguenti integrali, motivando le risposte:

$$A = \int_{-u}^u x^7 e^{-x^2} dx, \quad B = \int_{-u}^u e^{-x^2} dx, \quad C = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-5x^2} dx.$$

1 Osserviamo innanzitutto che l'integrale indefinito $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$ non è risolvibile analiticamente. Di conse-

guenza, abbozziamo il grafico della funzione $f(x) = e^{-x^2}$.

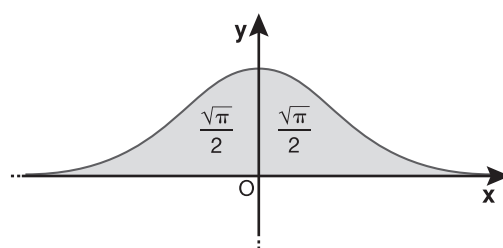
Osserviamo che la funzione $f(x) = e^{-x^2}$ è una gaussiana centrata nell'origine.

Ricordiamo le sue proprietà.

La funzione è definita e continua su tutto \mathbb{R} . È pari perché:

$$f(-x) = e^{-(-x)^2} = e^{-x^2} = f(x), \forall x \in \mathbb{R},$$

perciò il grafico della funzione è simmetrico rispetto all'asse y . La funzione è positiva su tutto \mathbb{R} perché è una funzione esponenziale. Ha un asintoto orizzontale, $y = 0$, perché $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{-x^2} = 0$. Infine, $f'(x) = -2xe^{-x^2} > 0$ se e solo se $x < 0$, ovvero la funzione è crescente in $] -\infty; 0[$ e decrescente in $] 0; +\infty[$ e assume il suo massimo assoluto in 0.



■ Figura 12

Notiamo che:

$$\int_{-\infty}^0 e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

La funzione $F(x) = \int_{-\infty}^x e^{-t^2} dt$ è monotona crescente. Infatti, $F'(x) = e^{-x^2} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Poiché $F(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ e $F(u) = 1 > \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, quindi $u > 0$.

Determiniamo i valori integrali A , B e C .

Per calcolare l'integrale A , osserviamo che la funzione $f(x) = x^7 e^{-x^2}$ è dispari. Infatti,

$$f(-x) = (-x)^7 e^{-(-x)^2} = -x^7 e^{-x^2} = -f(x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Possiamo concludere che $\int_{-u}^{+u} x^7 e^{-x^2} dx = 0$

perché $\int_{-u}^0 x^7 e^{-x^2} dx = -\int_0^u x^7 e^{-x^2} dx$.

Per calcolare B , possiamo suddividere l'area al di sotto del grafico della funzione in tre parti, aventi area D , B ed E .

Notiamo che $D = E$ per simmetria e che:

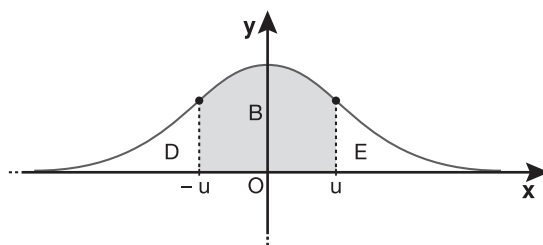
$$E = \int_{-\infty}^{+u} e^{-x^2} dx - \int_{-\infty}^u e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} - 1.$$

Di conseguenza:

$$B = \int_{-u}^u e^{-x^2} dx = \int_{-\infty}^{+u} e^{-x^2} dx - 2E = \sqrt{\pi} - 2(\sqrt{\pi} - 1) = 2 - \sqrt{\pi}.$$

Calcoliamo l'integrale C :

$$C = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-5x^2} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\sqrt{5}x)^2} dx.$$



■ Figura 13

Sostituiamo $y = \sqrt{5}x \rightarrow x = \frac{y}{\sqrt{5}}, dx = \frac{dy}{\sqrt{5}}$, per $x \rightarrow -\infty, y \rightarrow -\infty$ e per $x \rightarrow +\infty, y \rightarrow +\infty$.

Quindi:

$$C = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} \frac{dy}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy = \sqrt{\frac{\pi}{5}}.$$