4 Posto, per $n \in \mathbb{N}$, $A_n = \int_0^1 x^n e^x \, dx$, stabilire il valore di A_1 e dimostrare che, per ogni $n > 0$, si ha $A_n = e - n\, A_{n-1}$.

4 $A_1 = \int_0^1 xe^x\,dx$. Calcoliamo l'integrale per parti:

$$A_1 = \int_0^1 xe^x\,dx = [xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x\,dx = [xe^x - e^x]_0^1 = e - e + 1 = 1.$$

Dimostriamo che $A_n = e - n\,A_{n-1}$, osservando che $A_{n-1} = \int_0^1 x^{n-1} e^x\,dx$.

Procediamo di nuovo per parti:

$$A_n = \int_0^1 x^n e^x\,dx = [x^n e^x]_0^1 - n\int_0^1 x^{n-1} e^x\,dx = e - n \cdot A_{n-1}.$$