SOLUZIONE DEL PROBLEMA 1
TEMA DI MATEMATICA – ESAME DI STATO 2017

1. Studiamo la funzione $f(x)$ per verificare che il suo grafico sia compatibile con il profilo della pedana.

   Dominio della funzione. $x \in \mathbb{R}$

   Eventuali simmetrie della funzione.

$$f(-x) = \sqrt{2} - \frac{e^{-x} + e^{-(-x)}}{2} = \sqrt{2} - \frac{e^{-x} + e^{x}}{2} = f(x)$$

   La funzione è pari.

   Intersezione con l'asse y.

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = \sqrt{2} - \frac{e^0 + e^{-0}}{2} = \sqrt{2} - 1 \end{cases}$$

   Osserviamo che $\sqrt{2} - 1 \simeq 0,414 < 0,5$; nel grafico vediamo che effettivamente l'intersezione della curva con l'asse y ha ordinata minore di $0,5$.

   Intersezioni con l'asse x.

$$y = 0 \to \sqrt{2} - \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 0 \to e^x + \frac{1}{e^x} = 2\sqrt{2} \to$$

$$\frac{e^{2x} + 1}{e^x} = \frac{2\sqrt{2}e^x}{e^x} \xrightarrow{e^x > 0} e^{2x} - 2\sqrt{2}e^x + 1 = 0$$

   Poniamo $z = e^x$.

$$z^2 - 2\sqrt{2}z + 1 = 0 \to z = \sqrt{2} \pm 1$$

   Osserviamo che i due valori ottenuti sono positivi, quindi otteniamo due soluzioni distinte per x.

$$e^x = \sqrt{2} \pm 1 \to x = \ln(\sqrt{2} + 1) \vee x = \ln(\sqrt{2} - 1)$$

Per la simmetria della funzione, i due valori ottenuti sono opposti, con $\ln(\sqrt{2} \pm 1) \simeq \pm 0,88$.

Concludiamo che $a = \ln(\sqrt{2} + 1)$.

Segno della funzione.

$$y > 0 \to \sqrt{2} - \frac{e^x + e^{-x}}{2} > 0 \to e^x + \frac{1}{e^x} < 2\sqrt{2} \to$$
$$\frac{e^{2x} + 1}{e^x} < \frac{2\sqrt{2}e^x}{e^x} \xrightarrow{e^x > 0} e^{2x} - 2\sqrt{2}e^x + 1 < 0$$

Poniamo $z = e^x$ e ricordiamo che $\ln(x)$ è una funzione monotona crescente.

$$z^2 - 2\sqrt{2}z + 1 < 0 \to \sqrt{2} - 1 < z < \sqrt{2} + 1 \to \ln(\sqrt{2} - 1) < x < \ln(\sqrt{2} + 1).$$

Quindi $f(x)$ è positiva nell'intervallo $] - a; a[$, in accordo al grafico assegnato.

Studio della derivata prima.

$$f'(x) = \frac{e^{-x} - e^x}{2}$$

$$f'(x) > 0 \to e^{-x} - e^x > 0 \to e^x < \frac{1}{e^x} \xrightarrow{e^x > 0} e^{2x} < 1 \to 2x < \ln 1 \to x < 0$$

La funzione è quindi crescente per $x < 0$, decrescente per $x > 0$. Per $x = 0$ la funzione ha un massimo assoluto.

Studio della derivata seconda.

$$f''(x) = -\frac{e^x + e^{-x}}{2} \to f''(x) < 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$$

La funzione non ha flessi e rivolge la concavità verso il basso.

Possiamo concludere che il grafico della funzione assegnata è compatibile con il profilo della pedana.

2. Chiamiamo $\bar{f}(x)$ la funzione ottenuta affiancando le copie del grafico di $f(x)$. $\bar{f}(x)$ è una funzione continua, periodica di periodo $2a$. Calcoliamo la derivata sinistra e la derivata destra nel punto di non derivabilità $x = a = \ln(\sqrt{2}+1)$.

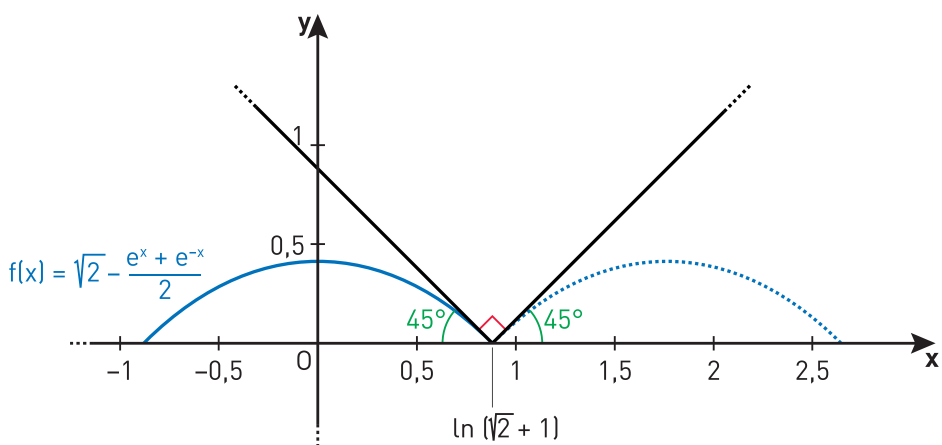
$$\bar{f}'_-(a) = f'(a) = \frac{e^{-a}-e^{a}}{2} = \frac{1-e^{2a}}{2e^{a}} = \frac{1-e^{2\ln(\sqrt{2}+1)}}{2e^{\ln(\sqrt{2}+1)}} =$$

$$\frac{1-(\sqrt{2}+1)^2}{2(\sqrt{2}+1)} = \frac{1-2-1-2\sqrt{2}}{2(\sqrt{2}+1)} = \frac{-2(\sqrt{2}+1)}{2(\sqrt{2}+1)} = -1$$

Per la periodicità di $\bar{f}(x)$ e per la simmetria di $f'(x)$ (che è una funzione dispari), otteniamo:

$$\bar{f}'_+(a) = f'(-a) = -f'(a) = 1.$$

Nel punto $x = a$ la tangente sinistra e la tangente destra del grafico hanno coefficienti angolari rispettivamente -1 e 1; il prodotto di tali coefficienti angolari è -1, quindi le rette sono perpendicolari. Per la periodicità la stessa proprietà vale in tutti i punti di non derivabilità.



Per determinare la lunghezza dell'arco descritto da $f(x)$ in $[-a; a]$ calcoliamo l'integrale

$$L = \int_{-a}^{a} \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx.$$

Poiché $f'(x)$ è dispari, la funzione integranda è pari, quindi:

$$L = 2\int_0^a \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx = 2\int_0^a \sqrt{1+\left(\frac{e^{-x}-e^x}{2}\right)^2}\,dx =$$

$$2\int_0^a \sqrt{\frac{4+e^{-2x}+e^{2x}-2}{4}}\,dx = \int_0^a \sqrt{2+e^{-2x}+e^{2x}}\,dx.$$

Osserviamo che l'espressione all'interno della radice quadrata è uguale a $(e^x+e^{-x})^2$, quindi:

$$L = \int_0^a \sqrt{(e^x+e^{-x})^2}\,dx = \int_0^a (e^x+e^{-x})\,dx = [e^x - e^{-x}]_0^a =$$

$$e^a - e^{-a} = e^{\ln(\sqrt{2}+1)} - e^{-\ln(\sqrt{2}+1)} = \sqrt{2}+1-\frac{1}{\sqrt{2}+1} =$$

$$\frac{2+1+2\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} = \frac{2(\sqrt{2}+1)}{\sqrt{2}+1} = 2.$$

L'arco è quindi lungo come il lato del quadrato.

In alternativa l'integrale $\int_0^a \sqrt{2+e^{-2x}+e^{2x}}\,dx$ si poteva risolvere per sostituzione, ponendo $e^x = t$. Dal cambio di variabile segue:

$$x = \ln t \rightarrow\ dx = \frac{1}{t}\,dt;$$

$$x = 0 \rightarrow t = 1;$$

$$x = a \rightarrow t = e^a.$$

L'integrale diventa:

$$L = \int_1^{e^a} \sqrt{2+\frac{1}{t^2}+t^2}\cdot\frac{1}{t}\,dt = \int_1^{e^a} \sqrt{\frac{2t^2+1+t^4}{t^2}}\cdot\frac{1}{t}\,dt =$$

$$\int_1^{e^a} \sqrt{\left(\frac{t^2+1}{t}\right)^2}\cdot\frac{1}{t}\,dt = \int_1^{e^a} \frac{t^2+1}{t^2}\,dt = \int_1^{e^a} 1+\frac{1}{t^2}\,dt = \left[t - t^{-1}\right]_1^{e^a} =$$

$$e^a - e^{-a} = e^{\ln(\sqrt{2}+1)} - e^{-\ln(\sqrt{2}+1)} = \sqrt{2}+1-\frac{1}{\sqrt{2}+1} =$$

$$\frac{2+1+2\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} = \frac{2(\sqrt{2}+1)}{\sqrt{2}+1} = 2.$$

3. Il punto L è la proiezione del centro C del quadrato sul lato DE, quindi il triangolo ACL è rettangolo in L. Il punto M ha la stessa ascissa di L e la stessa ordinata di A, quindi il triangolo ALM è rettangolo in M. Le rette AC e LM sono parallele perché entrambe parallele all'asse y, quindi formano con la trasversale DE angoli alterni interni congruenti: $A\hat{L}M \cong L\hat{A}C$. I triangoli ACL e ALM hanno dunque tutti gli angoli congruenti e quindi sono simili.

   Per il significato geometrico della derivata prima:
$$\frac{\overline{LM}}{\overline{AM}} = f'(x).$$
   Per la similitudine fra i triangoli abbiamo:
$$\frac{\overline{LM}}{\overline{AM}} = \frac{\overline{AL}}{\overline{LC}},$$
   dove $\overline{LC} = 1$, poiché corrisponde a metà del lato del quadrato. Combinando le due uguaglianze otteniamo
$$f'(x) = \frac{\overline{AL}}{\overline{LC}} \to f'(x) = \overline{AL}.$$
   Applichiamo il teorema di Pitagora al triangolo ACL:
$$\overline{AC} = \sqrt{\overline{LC}^2 + \overline{AL}^2} = \sqrt{1 + [f'(x)]^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{e^{-x} - e^{x}}{2}\right)^2} =$$
$$\sqrt{\frac{4 + e^{-2x} + e^{2x} - 2}{4}} = \sqrt{\frac{2 + e^{-2x} + e^{2x}}{4}} = \sqrt{\left(\frac{e^{x} + e^{-x}}{2}\right)^2} = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}.$$
   Pertanto:
$$d = f(x) + \overline{AC} = \sqrt{2} - \frac{e^{x} + e^{-x}}{2} + \frac{e^{x} + e^{-x}}{2} = \sqrt{2}.$$

4. Per evitare ambiguità, chiamiamo $g(x) = \frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{e^{x}+e^{-x}}{2}$. Osserviamo che il grafico di $g(x)$ si ottiene da quello di $f(x) = \sqrt{2} - \frac{e^{x}+e^{-x}}{2}$ tramite una traslazione verso il basso lungo l'asse y, in quanto $\frac{2}{\sqrt{3}} < \sqrt{2}$.

Determiniamo l'angolo α formato dalla tangente a $g(x)$ nel punto $x = -\frac{\ln 3}{2}$ con l'asse x, calcolando la derivata prima di $g(x)$ in tale punto.

$$g'(x) = \frac{e^{-x} - e^{x}}{2} \rightarrow g'\left(-\frac{\ln 3}{2}\right) = \frac{e^{\frac{\ln 3}{2}} - e^{-\frac{\ln 3}{2}}}{2} = \frac{\sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}}}{2} = \frac{3-1}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \rightarrow$$

$$\tan\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} \rightarrow \alpha = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 30°$$

L'angolo interno β del poligono regolare cercato è quindi:

$$\beta = 180° - 2\alpha = 120°.$$

Il poligono regolare che ha angoli interni di 120° è l'esagono regolare.