SOLUZIONE DEL PROBLEMA 2
TEMA DI MATEMATICA – ESAME DI STATO 2017

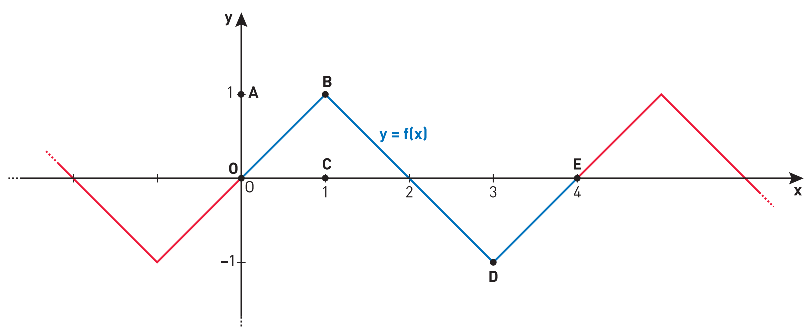
1. La funzione f si può scrivere in $[0;4]$ come

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in [0;1[\\ -x+2 & \text{se } x \in [1;3[\\ x-4 & \text{se } x \in [3;4] \end{cases}$$

Disegniamo il grafico nel dominio $\mathbb{R}$ e osserviamo che $f(x)$ si può scrivere come

$$f(x) = \begin{cases} x-4k & \text{se } x \in [-1+4k;1+4k[\\ -x+2+4k & \text{se } x \in [1+4k;3+4k[\end{cases}$$

con $k \in \mathbb{Z}$.



Questa funzione è definita e continua in tutto il dominio $\mathbb{R}$ perché continua a tratti e il limite destro e sinistro nei punti di congiunzione coincidono. La funzione f è inoltre derivabile negli intervalli aperti $]-1+4k;1+4k[$ e $]1+4k;3+4k[$ perché i polinomi sono funzioni derivabili. Calcoliamo la derivata prima.

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in]-1+4k;1+4k[\\ -1 & \text{se } x \in]1+4k;3+4k[\end{cases}$$

Verifichiamo la derivabilità in $]0;4[$ nei punti di congiunzione $x = 1$, $x = 3$ analizzando i limiti della derivata prima da destra e da sinistra.

$$\lim_{x\to 1^-} f'(x) = 1 \qquad \lim_{x\to 1^+} f'(x) = -1$$

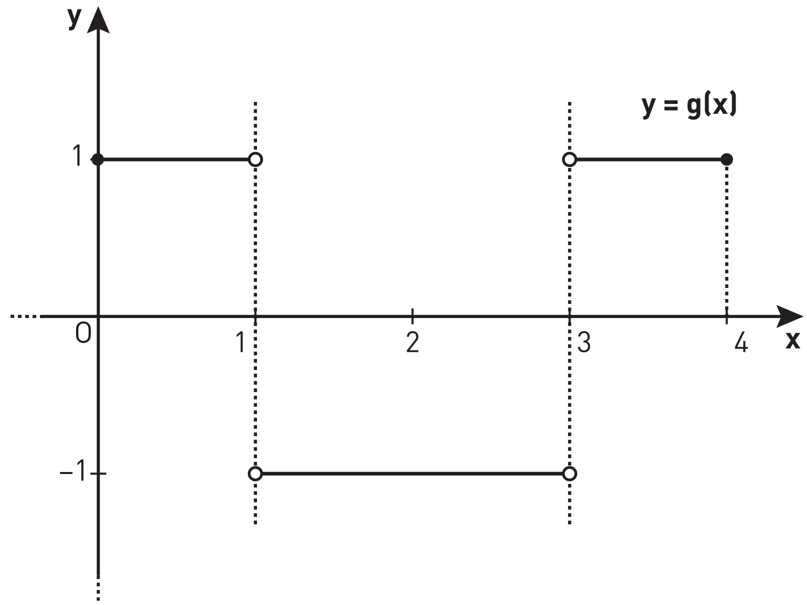
$$\lim_{x\to 3^-} f'(x) = -1 \qquad \lim_{x\to 3^+} f'(x) = 1$$

Osserviamo che i limiti destri e sinistri non coincidono, quindi f non è derivabile in $x = 1$ e $x = 3$. Per periodicità possiamo affermare che f non è derivabile nei punti $x = 1 + 4k$ e $x = 3 + 4k$ con $k \in \mathbb{Z}$, ovvero nei punti $x = 1 + 2k'$, con $k' \in \mathbb{Z}$.

Poiché $f(x)$ è una funzione periodica non costante, il limite $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ non esiste.

Per calcolare $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ si utilizza il teorema del confronto. Infatti, dato che $-1 \leq f(x) \leq 1$, si ha che $-\frac{1}{x} \leq \frac{f(x)}{x} \leq \frac{1}{x}$ per $x > 0$. Ne risulta che $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$.

Disegniamo il grafico di $g(x) = f'(x)$, di cui abbiamo già calcolato l'espressione analitica.



Determiniamo l'espressione analitica di $h(x)$ per $x \in [0;4]$, considerando i tre sottointervalli $[0;1]$, $]1;3]$ e $]3;4]$.

- Per $x \in [0;1]$, $h(x) = \int_0^x t\ dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^x = \frac{x^2}{2}$.
- Per $x \in]1;3]$,

$$\begin{array}{rclcll} h(x) & = & \int_0^1 f(t)\ dt & + & \int_1^x (2-t)\ dt & = \\ & & h(1) & + & \left[2t - \frac{t^2}{2}\right]_3^x & = \\ & & \frac{1}{2} & + & 2x - \frac{x^2}{2} - 2 + \frac{1}{2} & = -\frac{x^2}{2} + 2x - 1 \end{array}$$

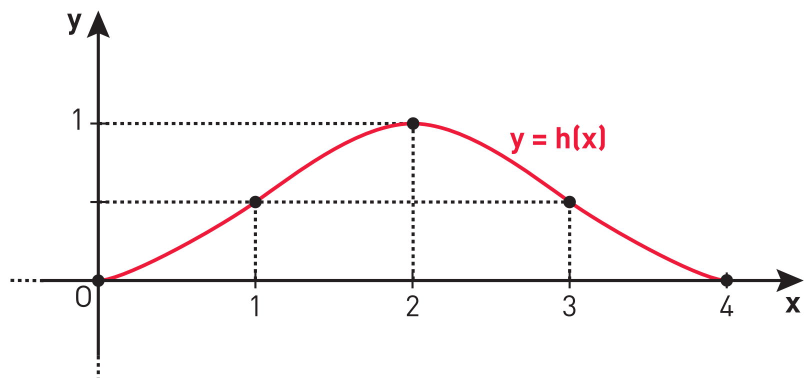
- Per $x \in]3;4]$,

$$\begin{array}{rclcll} h(x) & = & \int_0^3 f(t)\ dt & + & \int_3^x (t-4)\ dt & = \\ & & h(3) & + & \left[\frac{t^2}{2} - 4t\right]_1^x & = \\ & & \frac{1}{2} & + & \frac{x^2}{2} - 4x - \frac{9}{2} + 12 & = \frac{x^2}{2} - 4x + 8 \end{array}$$

Quindi l'espressione analitica per $h(x)$ è la seguente

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{2} & \text{se } x \in [0;1[\\ -\dfrac{x^2}{2} + 2x - 1 & \text{se } x \in [1;3[\\ \dfrac{x^2}{2} - 4x + 8 & \text{se } x \in [3;4] \end{cases}$$

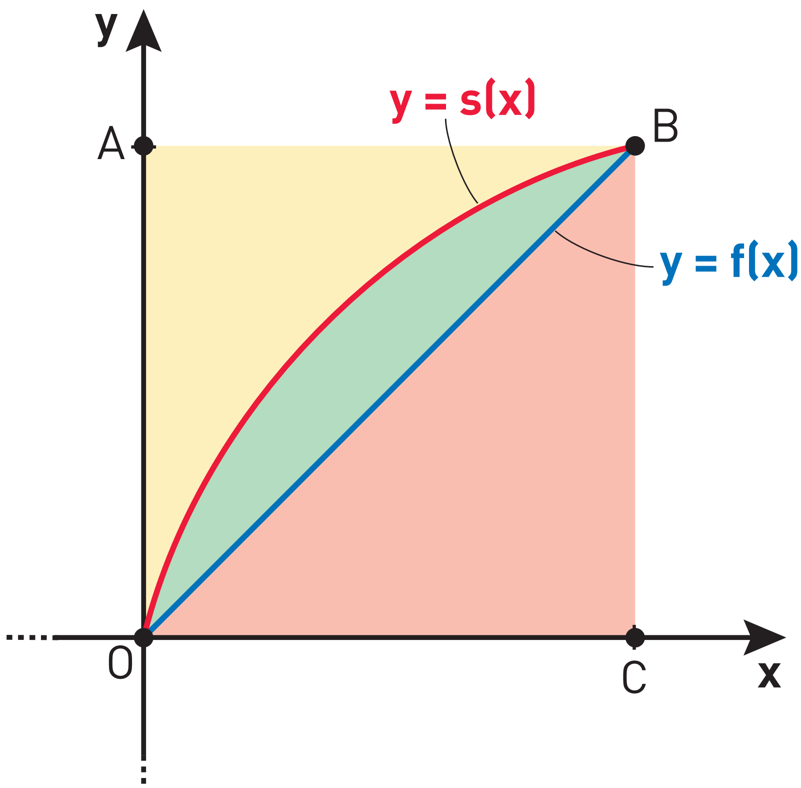
Osserviamo che il grafico è composto da tre archi di parabola che si raccordano nei punti $\left(1; \dfrac{1}{2}\right)$ e $\left(3; \dfrac{1}{2}\right)$.



In alternativa è possibile disegnare un grafico qualitativo di $h(x)$ osservando che la funzione integrale di funzioni lineari a tratti è formata da archi di parabola la cui concavità dipende dal segno di $g(x) = h''(x)$ e che l'area di ogni triangolo congruente a OBC è uguale a $\dfrac{1}{2}$.

2. Il periodo di $f(x)$ è 4, mentre il periodo di $s(x) = \sin(bx)$ è $\frac{2\pi}{b}$. Ponendo $\frac{2\pi}{b} = 4$ si ottiene $b = \frac{\pi}{2}$.
I grafici di $f(x)$ e $s(x)$ dividono il quadrato $OABC$ in tre parti in quanto $f(0) = s(0) = 0$ e $f(1) = s(1) = 1$ e i grafici di f e s non hanno altri punti di intersezione in $]0;1[$. Dimostriamo quest'ultima affermazione. Il grafico di $\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ è una contrazione orizzontale di $\sin x$ di fattore $\frac{2}{\pi}$. La funzione $\sin(x)$ sta sopra la retta congiungente il punto $(0;0)$ e

il punto $(\frac{\pi}{2};1)$. Quindi il grafico di $s(x)$ in $[0;1]$ sta sopra la funzione $f(x)=x$ e di conseguenza i due grafici non si intersecano in altri punti.

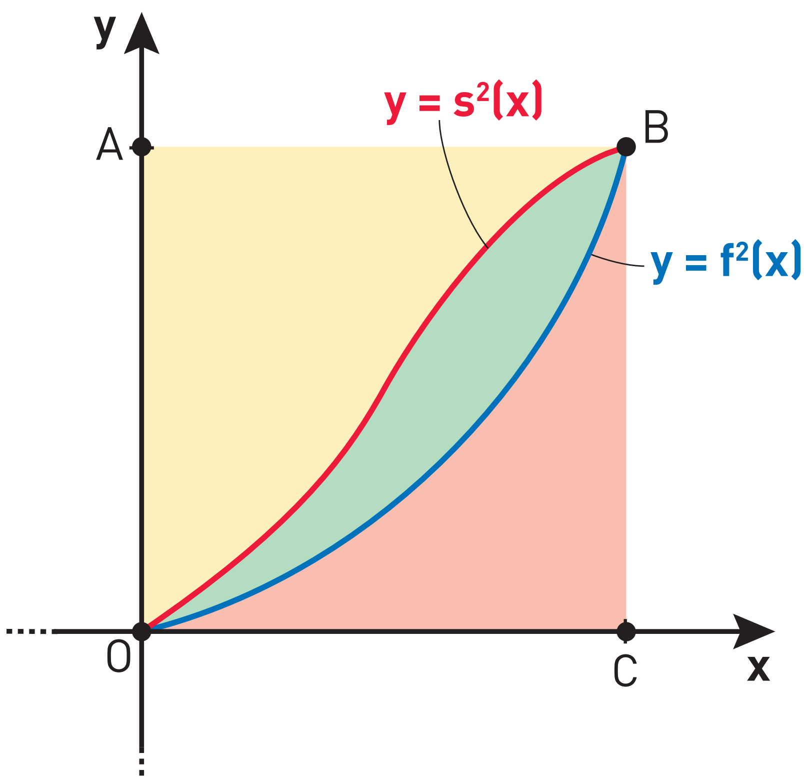


Dato che l'area del quadrato $OABC$ è uguale a 1, la probabilità di cadere su una delle tre parti sarà uguale alla misura della rispettiva area. Calcoliamo quindi le aree.

$$\begin{aligned}
A_{rosa} &= \int_0^1 x\ dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2} = 0,5 \\
A_{verde} &= \int_0^1 \left[\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) - x\right]\ dx = \left[-\frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \\
&\quad -\frac{1}{2} - \left(-\frac{2}{\pi}\right) = \frac{2}{\pi} - \frac{1}{2} \simeq 0,14 \\
A_{gialla} &= 1 - A_{rosa} - A_{verde} = 1 - \frac{1}{2} - (\frac{2}{\pi} - \frac{1}{2}) = 1 - \frac{2}{\pi} \simeq 0,36.
\end{aligned}$$

Le probabilità di cadere nelle zone rosa, verde e gialla sono quindi rispettivamente del 50%, del 14% circa e del 36% circa.

3. Rappresentiamo le funzioni $f^2(x) = x^2$ e $s^2(x) = \sin^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ nell'intervallo $[0;1]$, osservando che, essendo $0 \leq f(x) \leq 1$ e $0 \leq s(x) \leq 1$, si avrà $f^2(x) \leq f(x)$ e $s^2(x) \leq s(x)$.



Quindi si avrà un aumento dell'area gialla e una diminuzione dell'area rosa; per quanto riguarda l'area verde è difficile fare una stima qualitativa.
Calcoliamo quindi le probabilità, ancora una volta uguali alle rispettive aree.
Per calcolare l'integrale di $\sin^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ utilizzeremo la formula di bisezione

$\sin^2(\alpha/2) = \dfrac{1-\cos\alpha}{2}$.

$$\begin{aligned}
A_{rosa} &= \int_0^1 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3} \simeq 0,33\\
A_{verde} &= \int_0^1 \left[\sin^2\left(\frac{\pi}{2}x\right) - x^2\right]\,dx = \int_0^1 \sin^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)\,dx - \int_0^1 x^2\,dx =\\
&\int_0^1 \frac{1-\cos(\pi x)}{2}\,dx - \frac{1}{3} = \frac{1}{2}\int_0^1 [1-\cos(\pi x)]\,dx - \frac{1}{3} =\\
&\frac{1}{2}\left([x]_0^1 - \frac{1}{\pi}[\sin(\pi x)]_0^1\right) - \frac{1}{3} =\\
&\frac{1}{2}\left[1 - \frac{1}{\pi}(\sin\pi - \sin 0)\right] - \frac{1}{3} =\\
&\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3} = \tfrac{1}{6} \simeq 0,17\\
A_{gialla} &= 1 - A_{rosa} - A_{verde} = 1 - \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{6} = \tfrac{1}{2} \simeq 0,5.
\end{aligned}$$

Le probabilità di cadere nelle zone rosa, verde e gialla sono quindi rispettivamente del 33% crica, del 17% circa e del 50%.

4. Per calcolare il volume del solido di rotazione utilizziamo il metodo dei gusci cilindrici.

$$\begin{aligned}
V &= 2\pi\int_0^3 xh(x)dx =\\
&2\pi\left(\int_0^1 x\frac{x^2}{2}\,dx + \int_1^3 x\left(-\frac{x^2}{2}+2x-1\right)\,dx\right) =\\
&2\pi\left(\left[\frac{x^4}{8}\right]_0^1 + \left[-\frac{x^4}{8}+\frac{2x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right]_1^3\right) =\\
&2\pi\left(\frac{1}{8} - \frac{81}{8} + 18 - \frac{9}{2} + \frac{1}{8} - \frac{2}{3} + \frac{1}{2}\right) = \frac{83}{12}\pi
\end{aligned}$$